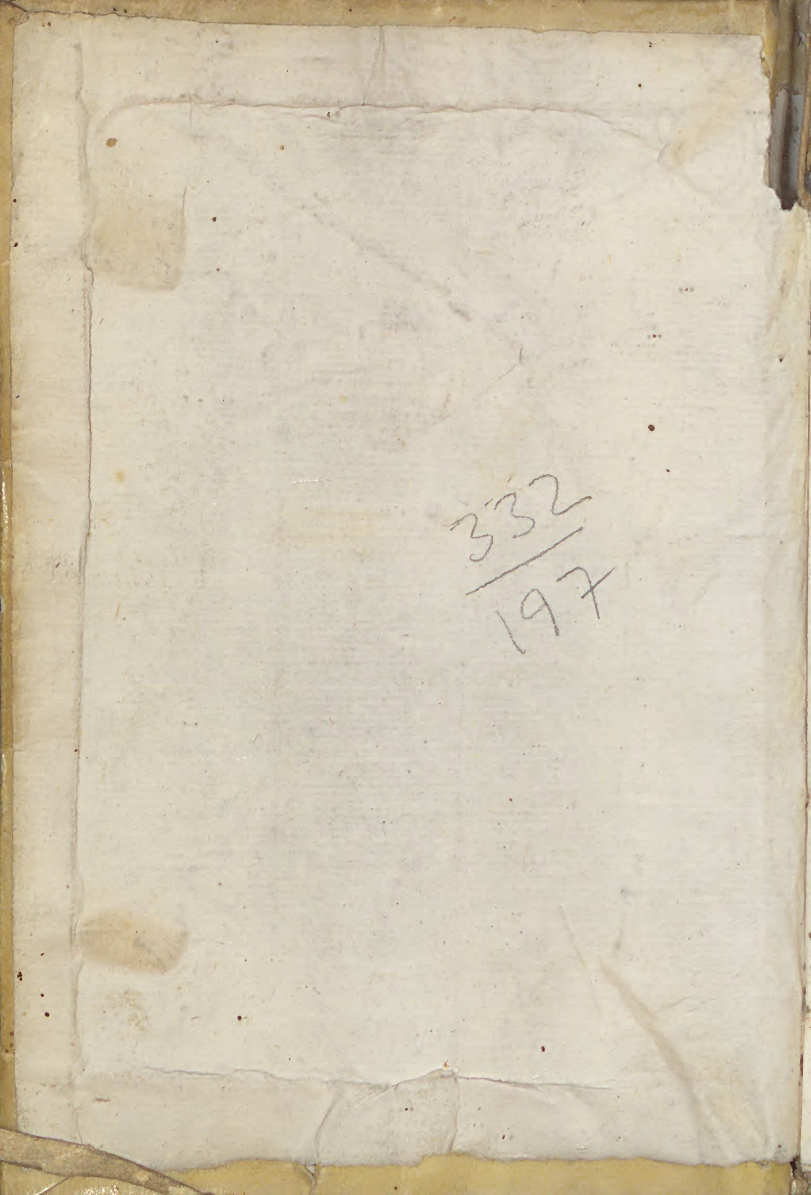
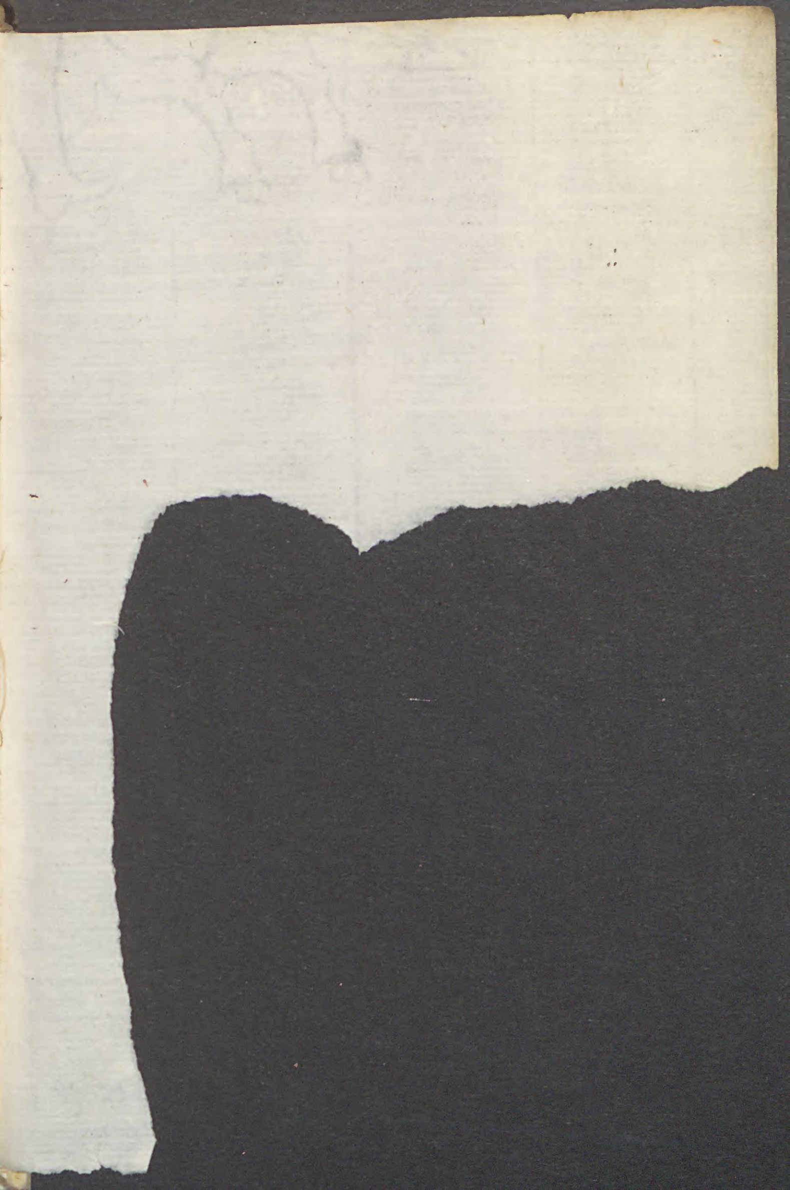
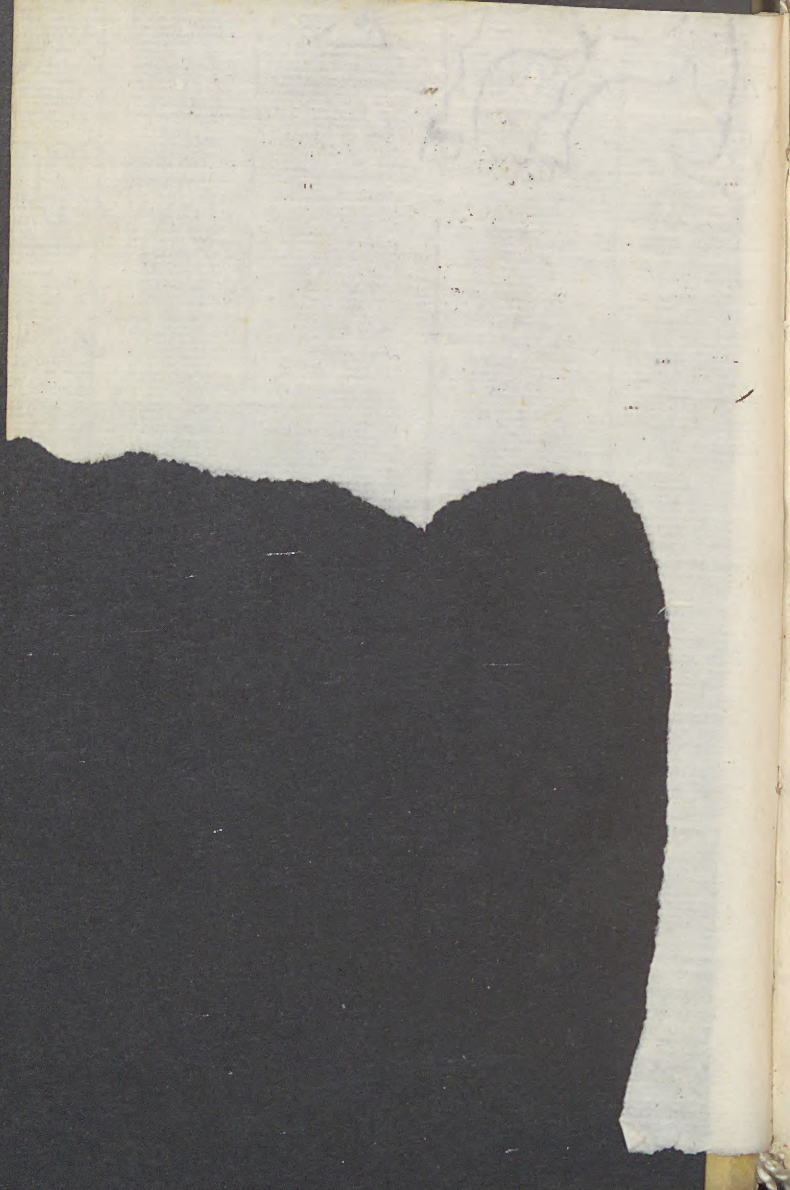
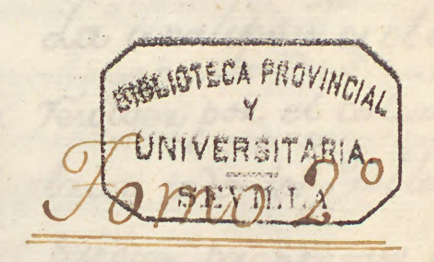



332
197

Mss.







Tomo 2º

Dela Analipsis

ó

Arte Resolutiva.



En Sevilla à 27
de Setiembre de 1783.

218. La analipsis es el arte de resolver por el calculo algebrico todos los Problemas que puedan proponerse sobre las magnitudes, ò la Cantidad.

219. Proponer un Problema es decir, que se alle el valor de una ò mas incognitas; pero esto no puede ser si poniendo el Problema no se determina la relacion de estas incognitas con cantidades conocidas; estas relaciones se llaman los Datos del Problema.

220. Cada una de estas relaciones asignadas entre los Datos, y las

incognitas se llaman condicion del Problema; porque en efecto expresa las condiciones vaso las quales hay igualdad entre los datos, y las incognitas.

221. La expresion algebraica de una ~~cantidad~~ condicion de un Problema se llama Equacion; luego una equacion es un conjunto de terminos algebraicos, compuestos de cantidades conocidas, è incognitas unidas con el signo $=$.

222. Los datos, ò las cantidades conocidas en un problema suelen representarse por las prime-

-ras

letras del alfabeto, las que regularmente son minusculas, y las incognitas por las ultimas como son x, y, z, lo que es util para distinguirlas à primera vista.

223. Todos los terminos que estan àla izquierda del signo = en una equacion forman el primer miembro de esta equacion, y los dela derecha el segundo.

224. Equacion del primer grado es aquella enque la incognita no pasa dela primera potencia.
Equacion del 2.º grado es aquella enq.e la incognita, esta elevada ala 2.ª potencia, ò que

dos magnitudes se multiplican una por otra.

Equacion del 3.º grado es aquella en q.e el mayor exponente de la incognita: ó la suma de los exponentes de las incognitas, que se multiplican es 3, y asi de los demas grados.

V.g. $ab-bx+c=cx$ es una equacion del primer grado.

$x^2-ax=b$; $ax-xy+y=c$; siendo las cantidades x, y incognitas son dos equaciones del 2.º grado.

$x^2y-xy^2+bx-cy=a$; $x^3-ax=d$ son dos equaciones del 3.º grado.

225. Resolver un problema es allar el valor de una, ó mas incognitas, expresado en cantidades

conocidas, ó hacer ver q.e este valor es imposible, lo q.e sucede quando las condiciones dadas implican contradiccion.

226 Para ellar el valor de cada incognita es preciso hacer sobre cada miembro dela equacion varias operaciones, segun el estado enq.e se ellan las incognitas: estas operaciones son la Multiplicacion, la Transposicion, la division, la Sobstitucion, y la extraccion delas Raizes; el orden de operaciones es el siguiente.

227. Para las equaciones del primer grado, que solo tienen una

incognita. "

1.° Si hay quebrados se ace la multiplicacion, para quitar todos sus denominadores.

2.° Se traxponen los terminos de
de otro p.a dejar solos en un miembro
un miembro, los q. contienen la incognita, siendo el otro miembro compuesto de cantidades enteramente conocidas.

3.° Se parte uno y otro miembro por las cantidades conocidas, que multiplican la incognita para dexarla sola en un miembro, y que el otro este compuesto de cantidades conocidas.

228 Si las equaciones del primer grado, contienen dos ò mas in-

cognitas, y que el problema haya de ser determinado tambien ade haver tantas equaciones, ò condiciones como incognitas ai; en cuio caso à mas de las tres reglas antecedentes se usa de la sobstitucion.

229. Si la equacion propuesta es del segundo grado, para allar el valor de la incognita se deve usar de la extraccion de las raizes; de este modo se verà en todos los casos qual de estas operaciones se deve usar actualmente.

Dela Multip.^on en las Equaciones

230 La multiplicacion en las Equaciones, sirve p.^a quitar los quebrados, que puedan encontrarse en ellas lo que se executa multiplicando todos los terminos dela multiplicacion sucesivamente, por todos los denominadores de los quebrados, lo que no puede mudar la igual.^d

V. G. en $\frac{ab}{c} - \frac{bx}{a} + \frac{cy}{b} = 0$

multiplico todo por c, y viene

$ab - \frac{bcx}{a} + \frac{c^2y}{b} = 0$

Despues multiplico todo por a, y resulta $a^2b - bcx + \frac{ac^2y}{b} = 0$

en fin multiplico todo por b, y sera

$a^2b^2 - b^2cx + ac^2y = 0$

Tambien la igualacion $\frac{ab}{c} - \frac{bx}{a} + \frac{ac}{b} - \frac{bc}{a} + \frac{ax}{b} - \frac{cx}{a} + \frac{ax}{c} - \frac{bx}{c} + \frac{cx}{b} = 0$.

Multiplicado todo por a se reduce à $\frac{a^2b}{c} - bx + \frac{a^2c}{b} - bc + \frac{a^2x}{b} - cx + \frac{a^2x}{c} - \frac{abx}{c} + \frac{acx}{b} = 0$

Multiplicado todo por b viene $\frac{a^2b^2}{c} - b^2x + a^2c - b^2c + a^2x - bcx + \frac{a^2bx}{c} - \frac{ab^2x}{c} + acx = 0$

Multiplicado todo enfin por c resulta $a^2b^2 - b^2cx + a^2c^2 - b^2c^2 - ab^2x + a^2cx - bc^2x + a^2bx + ac^2x = 0$

231. La transposicion en las equaciones sirve para mudar un termino de un miembro à otro sin quitar la igualdad de estos miembros.

Para esto se quita este termino, en el miembro en que está, y se descarte en el otro mudandole el signo. V.g. para transponer ac en la equiacion $ac+x=b$ se escrive $x=b-ac$, en efecto si de las quantidades igs. $ac+x$ y b se quita la misma quantidad ac los restos x y $b-ac$ deben ser iguales.

232. Luego por la transposicion un termino negativo puede hacerse positivo, y reciprocamente.

Tambien por la transposicion se puede tomar el valor de un termino qualquiera dexandolo solo en un miembro de la

equacion

233. No es una misma cosa tomar, que hallar el valor de un termino, ó letra; porque tomar el valor de un termino, ó letra es hacer de modo que este termino, esta letra esté solo en un miembro de la equacion de qualquiera quantidades conocidas, ó incognitas, que el otro esté completo, con tal q. si es letra la que se quiere despejar el 2.º miembro no contenga esta letra.

Hallar el valor de un termino, ó una letra es hacer tambien, q.e este termino, ó esta letra forme un miembro de la equacion, siendo el otro miem-

bxo comp.to de cantidades todas conocidas.

De la División.

234. La división en las equaciones sirve para despejar una incognita, ó una letra qualquiera de las quantidades, que la multiplican.

Esto se executa partiendo todos los terminos de la equacion por los coeficientes numericos ó literales de la incognita, ó letra q.e se quiere despejar. v.g. para despejar x en la equacion $bx-ab=c$ se debe partir todo por b, y resulta $x-a=\frac{c}{b}$

235. Una misma letra que se halla en muchos terminos,

hace un producto con la suma de las demas letras, ó coeficientes que se hallan en estos mismos terminos v.g. $ax - bx + x = x(a - b + 1)$ en efecto si se multiplica $a - b + 1$ por x será el producto $ax - bx + x$ luego para despejar x en la equacion $ax - x = b$ se debe escrivir $x = \frac{b}{a-1}$.

Quando una misma letra se halla en todos los terminos de la equacion se debe quitar de todos ellos un numero igl de veces escriviendo 1 en lugar de los terminos que por este medio se desvanecen. v.g. $a^2x - abx$ ~~$= c - 1$~~ $= ac - a$ se reduce à $ax - bx = c - 1$ despues despejando la x será $x = \frac{c-1}{a-b}$

236. El Methodo general para la resolucion de todas las

equaciones del primer grado á una incognita sola es

1º... Quitar los quebrados por la multiplicacion.

2º... Por la transposicion de xar solos en un miembro todos los terminos q.e contienen la incognita, siendo el otro miembro compuesto de quantidades todas conocidas, esto hecho, la operacion de la divicion consistirá en escrivir la incognita sola en un miembro igl. al otro miembro partido por los coeficientes numericos, ó literales q. multiplican esta incognita en el primer miembro. v. g. $ax-bx+x=a^2-b^2$ se reduce por la divicion á $x=\frac{a^2-b^2}{a-b+1}$

D̃ la Substitucion.

237.... La substitucion es una operacion cuyo fin es hacer desvanecer subsesivamte. una, ò mas incognitas, qe se hallan en un problema expresado por varias equaciones.

Esta operacion se puede hacer d̃ varios modos el mas facil es el sigte.

238.... Este methodo consiste en reducir el coeficiente d̃ una misma incognita à ser el mismo en todas las equaciones multiplicando cada equacion por el producto de los coeficientes d̃ esta misma incognita en las demas equaciones; despues se resta la 1a. equacion d̃ todas las demas, y se va siguiendo asi

hasta hacer desvanecer subsesi-
vam.te todas las incognitas me-
nos una, por cuyo medio el nu-
mero de las equaciones irá tam-
bien disminuyendo de una à
cada operacion de estas. v.g.
en las dos equaciones $ax - by = c$, $bx - cy = a$ multiplico la 1.a por b, y la 2.a por a, y tengo $abx - b^2y = bc$, y $abx - acy = a^2$ resto la 1.a equacion de la 2.a y viene $-b^2y - acy = a^2 - bc$, y partiendo resulta $y = \frac{a^2 - bc}{b^2 - ac}$

3.o Es menester poner en un miembro solo todos los terminos en que se encuentra la incognita.

Calculo.

$$(ax - by = c) \times b = (abx - b^2y = cb)$$
$$(bx - cy = a) \times a = (abx - acy = a^2)$$

Resto $abx - acy - abx + b^2y = a^2 - bc$

Reducido $b^2y - acy = a^2 - bc$

Dejando la y es $y = \frac{a^2 - bc}{b^2 - ac}$

De la extraccion de las raíces para las equaciones del 2.º grado.

239. ... Quando en una equacion la incognita esta elevada al quadrado

1.º .... Es menester ver si este quadrado esta multiplicado ó partido por alguna otra cantidad, en el primer caso se debe despejar por la division, y en el 2.º por la multiplicacion.

2.º ... Es menester ver si este quadrado es positivo, pues si es negativo se debe hacer positivo por la transposicion; porq.e un quadrado negativo es una cantidad imposible.

4.º .... # Despues se verà si este

miembro es un quadrado completo, lo q.e solo sucede quando la incognita se halla en un termino solo, como en $x^2 = a-b$

Quando a mas del quadrado de la incognita este miembro contiene uno, ó mas productos de la 1.a potencia de la incognita multiplicada por algunas otras cantidades conocidas como en $x^2 - 2ax = b$ este quadrado es incompleto, y es menester completarlo añadiendo á cada miembro de la equacion el quadrado de la mitad de la quantidad conocida, q.e multiplica la incognita.

5.o .... En fin se extraera la ra-

iz quadrada de cada miembro
de la equacion, y despues por la
transposicion se hallarà el va
lor de la incognita.

Exemplos.

Sea propuesto resolver es-
ta equacion $\frac{a^2-x^2}{b}=2a-b$
Operando como queda dho (pfô
236) multiplico todo por b y ten-
go $a^2-x^2=2ab-b^2$ despues mu-
dando todos los signos de la equ-
acion para hacer el quadrado
positivo (lo q.e siempre es licito)
viene $x^2-a^2=b^2-2ab$, y transpo-
niendo $x^2=a^2-2ab+b^2$, equacion
en q.e ambos miembros son qua-
drados perfectos: es despues
la raiz quadrada de ambos mi-
embros resulta $x=a-b$, ô $b-a$

Sea la propuesta $a+2x^2=b$ Despejo primero el quadrado de la incognita de su coeficiente 2 y tengo $\frac{a}{2}+x^2=\frac{b}{2}$ transponiendo viene $x^2=\frac{b-a}{2}$ lo q.e extrayendo las raizes dà $x=\pm\sqrt{\frac{b-a}{2}}$

Calculo.

$a-2x^2=b$,, $\frac{a}{2}+x^2=\frac{b}{2}$,,
$x^2=\frac{b-a}{2}$,, $x=\sqrt{\frac{b-a}{2}}$

240. Hemos puesto $\pm$ en el valor de x sacado de la ultima equacion porq.e en efecto $+\sqrt{\frac{b-a}{2}}\times+\sqrt{\frac{b-a}{2}}$ y $-\sqrt{\frac{b-a}{2}}\times-\sqrt{\frac{b-a}{2}}$ dan igualm.te $\frac{b-a}{2}$ valor de x^2; y como en todos los casos sucede lo mismo se sigue que todo problema de 2.o grado tiene siempre dos soluciones, pues al tiempo de extraer las raizes de uno, y otro miembro

de una equacion, una de estas dos raizes podrà siempre tomarse positiva, ò negativam.te log.e resivam.te dará dos valores à la incognita.

Sea la prop.ta $ax - \frac{x^2}{2} + d^2 = c$ Quito primeram.te el quebrado y viene $2ax - x^2 + 2d^2 = 2c$, despues hago x^2 positivo escribiendo $x^2 - 2ax - 2d^2 = -2c$ despues transponiendo tengo $x^2 - 2ax = 2d^2 - 2c$, el miembro en q.e està x no siendo un quebrado perfecto se debe completar añadiendo à cada miembro el quadrado a^2 de la mitad de la cantidad $-2a$, q.e que multiplica $2ax$, lo q.e produce $x^2 - 2ax + a^2 = a^2 + 2d^2 - 2c$, extrayendo las raizes de uno, y otro miembro viene $x - a = \pm \sqrt{a^2 + 2d^2 - 2c}$, y transponiendo en fin $x = a \pm \sqrt{a^2 + 2d^2 - 2c}$.

Sea la prop.ª 9a $9abx^2 - 3b^2x = ad$

Despejando p.r la division el quadrado de la incognita tengo $x^2 - \frac{3b^2}{9ab}x = \frac{ad}{9ab}$ y reduciendo serà $x^2 - \frac{b}{3a}x = \frac{d}{9b}$ despues se completa el quadrado añadiendo à cada miembro $\frac{b^2}{36a^2}$ quadrado de $\frac{b}{6a}$ mitad de $\frac{b}{3a}$ coeficiente de x, y viene $x^2 - \frac{b}{3a}x + \frac{b^2}{36a^2} = \frac{d}{9b} + \frac{b^2}{36a^2}$ ò reduciendo el 2.º miembro à un mismo denominador $x^2 - \frac{b}{3a}x + \frac{b^2}{36a^2} = \frac{4a^2d + b^3}{36a^2b}$ y extrayendo la raiz quadrada de cada miembro resulta $x - \frac{b}{6a} = \pm\sqrt{\frac{4a^2d+b^3}{36a^2b}} = \pm\frac{1}{6ab} \times \sqrt{4a^2d+b^3}$. en fin transponiendo serà $x = \frac{b}{6a} \pm \frac{1}{6ab}\sqrt{4a^2d+b^3}$

Y multiplicando por 6ab para quitar los quebrados resulta

$6abx = 6 \pm \sqrt{4a^2d + b^3}$ y despejando ultimam.te la incognita por la division será $x = \frac{b^2 \pm \sqrt{4a^2d+b^3}}{6ab}$

(e)

La equacion $x - x^2 = a$ se muda 1.º en $x^2 - x = -a$, despues en $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - a$ (pues $-x$ està supuesto tener -1 por coeficiente, cuya mitad es $-\frac{1}{2}$ y su quadrado $+\frac{1}{4}$) despues extrayendo la raiz de ambos miembros viene $2x - 1 = \pm\sqrt{1 - 4a}$, y despejando la incognita por la division viene $x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{1-4a}}{4}$ en transponiendo viene $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4a}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$

(f)

La equacion $x^2 + ax - x = a^2$ reparando q.e x està multiplicado por $a - 1$, y completando el quadrado se muda en $x^2 + (a-1)x + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$

$= 5a^2 - 2a + 1$, y queda reducida la equacion à $x^2 + (a-1)x + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = 5a^2 - 2a + 1$; y extrayendo la raiz de uno, y otro miembro serà

$$x + \frac{a-1}{2} = \sqrt{5a^2 - 2a + 1}$$

Y quitando el quebrado del primer miembro resultarà

$$x + a - 1 = \pm\sqrt{5a^2 - 2a + 1}$$

Y transponiendo resultarà

$$x = \frac{1 - a \pm \sqrt{5a^2 - 2a + 1}}{2}$$

241..... Quando la incognita està sola en la equacion con el signo $\sqrt{\ }$ como si estuviera $a - \sqrt{x} = b$ se quitarà este radical dexandolo primeramente solo en un miembro, y despues elevando los dos miembros al quadrado.

Asi se escribirà 1.º $a - b = \sqrt{x}$, despues $(a-b)^2 = x$ ò $x = a^2 - 2ab + b^2$

Del mismo modo si se tuviese $ax - \sqrt{x} = b$ se escribiera 1.º $ax - b = \sqrt{x}$

Despues $a^2x^2 - 2abx + b^2 = x$, Ecuacion del 2.º grado, q.e se resolverà como acabamos de decir.
Si se tubiera $x^2 + \sqrt{x} = b$, se escriviera 1.º $\sqrt{x} = b - x^2$ despues $x = b^2 - 2bx^2 + x^4$

Otro modo de Resolver las equaciones de 2.º grado.

1.º .... Quitense los quebrados.
2.º .... Haganse todas las multiplicaciones indicadas en los terminos en que se halla la incognita para q.e estas estèn sueltas.
3.º .... Ponganse en un miembro solo todos los terminos en q.e està la incognita, y en otro las cantidades puramente conocidas.
4.º .... Escrivanse x igual las cantidades conocidas q.e multiplican la incognita elevada al

primer grado mudando los signos, ± raiz del producto del 2.º miembro multiplicado por el quadruplo de las cantidades q.e multiplican la incognita elevada al 2.º grado, mas el quadrado de las cantidades q.e multiplican la incognita elevada al grado primero, todo partido por el duplo de las q.e multiplican la misma incognita elevada al 2.º grado.

Se ha propuesto resolver la question del 2.º grado $ax - \frac{x^2}{2} + a^2 = -c$ q.e se halla resuelta p.r el methodo antecedente

1.º . Quitando el quebrado viene $2ax - x^2 + 2d^2 = -2c$.

2.º .... Haciendo positivo x^2 viene $x^2 - 2ax - 2d^2 = -2c$.

3.º ... Transponiendo para dexar

en un miembro los terminos en q.e esta la incognita viene $x^2 - 2ax = 2d^2 - 2c$.

4.o ..... $x = 2a$ q.e multiplica $x \pm$ raiz del producto de 4 quadruplo del coeficiente de x^2 multiplicado por el 2.o miembro $2d^2 - 2c$ mas 4 a^2 quadrado del coeficiente de x todo partido por 2 duplo del coeficiente de x^2, que es la equacion $x = \frac{2a \pm \sqrt{8d^2 - 8c + 4a^2}}{2}$ y quitando el quebrado ó haciendo la division indicada partiendo $2a$ por 2 y $8d^2 - 8c + 4a^2$ por 4 quadrado de 2 por ser cantidades que estan debaxo del radical viene $x = a \pm \sqrt{2d^2 - 2c + a^2}$ que es lo mismo, que salio por el otro methodo.

De la resolucion de los Problemas por el Analisis.

232. Para resolver un problema es menester considerar con atencion el estado de la question: distinguir los datos de las incognitas expresando estas por las ultimas letras del alfabeto, y los datos por las primeras de suerte que la question quede expresada generalmente de un modo mas exacto, y con la mayor sencillez posible; para esto no se deben expresar con varias letras las cantidades iguales, ó que tengan partes comunes; y si por [illegible] [illegible] [illegible], y [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] se [illegible] expresan á por una equaci

cencia, advirtiendo, que para con-
seguir la resolucion completa de
un Problema ha de ser el numero
de Equaciones igual al de las
incognitas, en fin por las reglas
antecedentes se hallaran los
valores de las incognitas y el
Problema estará resuelto. Vea-
mos ahora la aplicacion de
esta theorica á algunos exemplos.

Problema 1º.

Padre e hijo componen entre los
dos la edad de 100 años, el Padre
tiene 30 añs. mas q.e el hijo se pre-
gunta quales son las edades de
padre e hijo.

Reso...... Lo 1º q.e hago es hacer
representadas por x è y, las edades
del P.e e hijo, despues los datos 100
y 30 haciendolos ig.s á a y b, esto es a
$= 100$, y $b = 30$; esto supuesto exami-

no la questión, y veo q.e segun las condiciones dadas el Padre, y el Hijo componen el n.o de 100 a.s es to es q.e la suma de las edades del Padre y del Hijo es 100, ó q.e $x+y=100$. x ó q.e me dà la primera condicion expresada algebraicam.te

6 Despues siendo condicion tambien, q.e el Padre deve tener 30 a.s mas q.e el Hijo es evidente q.e 30 serà la diferencia de las dos edades lo q.e me dà esta 2.a equacion $x-y=30$. Estas condiciones reducen el problema de la question general sig.te

Dadas la suma, y la dif.a de dos cantidades hallar cada una de ellas. Lo q.e se expresa de este modo.

Problema expresado en una dad...

Supóngan dos cantidades cuya

suma es 100 = a.
y la dif.ª 30 = b.
Expresado Algebraicam.te

$$x, y. \left\{ \begin{array}{l} x + y = a. \\ x - y = b. \end{array} \right.$$

Tengo pues dos equaciones, y dos incognitas: para hallar el valor de ellas sumo las dos equaciones y tengo $2x = a + b$, resto despues la 2.ª equacion $x - y = b$ de la 1.ª $x + y = a$, y viene por resto la equacion $2y = a - b$, parto esta equacion, y la suma $2x = a + b$ por 2 coeficiente de x en una, y de y en la otra, y vienen las equaciones $x = \frac{a+b}{2}$, y $y = \frac{a-b}{2}$, pero las edades buscadas, y substituyendo [illegible] de un numero en lugar de las letras resultan las equaciones

$x = \frac{100+30}{2} = 65$ edad del P.e y
$y = \frac{100-30}{2} = \frac{70}{2} = 35$ edad del hijo.

243..... De lo supuesto se sigue q.e las dos formulas $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$ dan una solucion gen.l de todas las questiones semejantes a la propuesta pues a, b, no estan limitadas a expresar 100, y 30. antes pueden representar qualquiera cantidad, de donde se infiere esta propriedad general de la magnitud.

Dada la suma (a) y la diferencia (b) de dos cantidades, la mayor (x) es ig.l a la mitad de la suma mas la mitad de la dif.a $(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)$ y la menor (y) es ig.l a la mitad de la suma menos la mitad de la dif.a $(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b)$ luego qualquiera question semejante a la prop.ta esta ya resuelta por las dos formulas antecedentes. v. g. Si 8 doblones, y un [illegible] se han distribuido a dos

pobres. 14 rs. entre los dos, y que
Pedro ayudado 4 rs. mas q.e Juan
es evidente q.e Pedro ava dado
$\frac{14+4}{2} = 9$ rs. y Juan $\frac{14-4}{2} = 5$ rs.

2.° tambien una formula puede
expresarse en forma de theorema
p.ej. en el exemplo antecedente se
puede decir de dos cantidades
que la mayor es igual a la mitad
de la suma mas la mitad de la dif.a
de los dos; y la menor es igual a la mi-
tad de la suma menos la mitad de
la dif.a de las dos.

Esta question se ha explicado
por extenso, para que pueda ser-
vir de norma para las demas. en
adelante seremos mas breves.

Prob. 2.°

Pedro, y Juan teniendo entre los
dos 49 pesos han perdido en el jue-
go 13 p.s Pedro ha perdido el ter-

cio de lo q.e tenía, y Juan la quinta
parte, se pregunta lo que tenía ca-
da uno antes de jugar, y lo que ca-
da uno ha perdido.

En este exemplo à primera vis-
ta parece que ay quatro incognitas
pues son quatro las preguntas, pe-
ro examinandolo con mas atencion,
se vè, que las quatro incognitas se
reducen à dos, porque conociendo
lo que tenía cada uno, como el 1.º
ha perdido el tercio de lo q.e tenia,
y el 2.º la quinta parte es eviden-
te, q.e se conocerà tambien lo que
cada uno hà perdido.

Question expressada en palabras.
Se pide el valor de dos cantida-
des cuya suma es 19 = a.
De suerte que el $\frac{1}{3}$ de la 1.a + el $\frac{1}{5}$
de la 2.a sea = 13 = b.

Algebricam.te
x . y.

$x + y = a$.
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = b$.

Hecho esto quito los quebrados de la $2.^a$ equacion multiplicando todo por 3 y despues por 5, y viene $5x + 3y = 15b$. despues usando el methodo de la substitucion porque quiero hallar el valor de x, y es menester que quede sola en la equacion, multiplico la $1.^a$ equacion $x + y = a$ por el coeficiente de y en la equacion $5x + 3y = 15b$. que es 3 y resultarà el producto $3x + 3y = 3a$, resto esta equacion de la $2.^a$ $5x + 3y = 15b$ el resto es $2x = 15b - 3a$, luego $x = \frac{15b - 3a}{2}$.
Del mismo modo para encontrar el valor de y multiplico la primera equacion por 5 coeficiente de x en la $2.^a$ y tengo $5x + 5y = 5a$, restando de esta la $2.^a$ $5x + 3y = 15b$ queda $2y = 5a - 15b$ dde

~~Luego~~ donde $y = \frac{5a - 15b.}{2}$

Luego sustituyendo numeros en lugar de las letras resulta q. Pedro tenia $\frac{15.13 - 3.19}{}= 21$ p.s y Juan tenia $\frac{5.19 - (2) 15.13}{2} = 25$ p.s y por consig.te que Pedro ha perdido 8 p.s y Juan 5.

Prob. 3.º

Un Padre en su testamento reparte su hacienda entre sus hijos de modo que el 1.º ha de tener 1000 pesos y la sexta parte de lo que quede despues de aver tomado estos 1000 p.s el 2.º ha de tener 2000 p.s y un sexto de lo q.e quede; el 3.º ha de haver 3000 p.s y un sexto de lo q.e quedare y assi hasta el ultimo tenga parte sexto y hecho de la manera ... la repartición las porciones de cada uno salieron ig.s se pregunta q.to importaba la hacienda del

Padre, quantos son los hijos, y lo
q.e toca á cada uno.

Aunque por el modo de pre-
guntar parece que ai tres incog-
nitas examinando mejor la ques-
tion veo, que no hai mas de una,
pues conociendo qual es la hacien-
da del P.e se saca immediatam.te el
n.o de los hijos, y lo q.e á cada uno toca.

Sea pues la hacienda del P.e =
x y 1000 p.s = a toda la operacion
consiste en buscar la expresion en x
y a de lo q.e toca al 1.o y 2.o hijo p.r
[illegible] q.e [illegible] es [illegible]
[illegible] rep[illegible], p[illegible]
[illegible] digo al 1.o hijo toca
1000 [illegible] $a + \frac{1}{6}$ de lo q.e queda despues
de [illegible] quitado a de x esto es
$\frac{x-a}{6}$ [illegible] la porcion del primer
hijo = a $a + \frac{x-a}{6}$

Del mismo modo se encontrará q.e
el 2.o hijo ha de tener $2a + \frac{1}{6}$ de lo q.e
quede despues de haver quitado de
x esto mismo $2a$ y lo que recevió el
primer[illegible] esto es q.e la porcion del hijo 2.o

sería $2a + \frac{x - 2a - \frac{x+a}{6}}{6} - a$

Y como estas dos partes son ig.s resulta la ecuación $a + \frac{x-a}{6} = 2a + \frac{x - 2a - \frac{x+a}{6}}{6} - a$ multiplicando todo por 6 viene $6a + x - a = 12a + x - 3a - \frac{x+a}{6}$ y reduciendo será $x = 4a + x - \frac{x+a}{6}$ multiplicando otra vez por 6 para quitar el 2.º quebrado viene $6x = 24a + 6x - x + a$.

Y reduciendo $x = 25a$ esto es, q.e la hacienda del P.e ascendía á 250 p.s dando pues al primer hijo 10 p.s queda la hacienda en 240 p.s cuya sexta parte es 40 los q.e con los 10 q.e avía tomado componen 50 parte del hijo primero, y como todos fueron ig.mte repartidos es evidente, q.e el n.º de los hijos era 5, y que á cada uno tocaron 50 p.s ^ luego al cavo del primer año la cantidad devida sería $a + \frac{ab}{c}$

Prob.ª 4.º

Sea un prestamo à tanto por 100; esto es q.e una cantidad de dinero a produce al cabo de cada año el interes $\frac{ab}{c}$; (a, b, c, son tres cantidades conocidas) se pregunta lo q. se ha de pagar cada año para q.e al cabo de un numero n de añ.s el deudor no quede à deber nada, con la presisa condicion de q.e las pagas q.e se hacen al cabo de cada año, han de ser todas ig.s

Solucion.

Sea x la cantidad, q.e se ha de pagar al cabo de cada año si a es el principal al cabo del primer año este principal trahera de redito $a \times \frac{b}{c}$, y quitando x que es lo q.e se paga vendrà el deudor à deber al principio del 2.º año la cantidad $a + \frac{ab}{c} - x$, y reduciendo todo à queb.do sera $\frac{ac+ab-cx}{c}$

Este resto del principal, que puede mirarse ahora como p̃pal para el 2.º año cuyo interes al cabo del año será el principal $\frac{ac+ab-cx}{c} \times \frac{b}{c}$ como en el primer año, luego al cabo del 2.º año deberá el deudor el p̃pal $\frac{ac+ab-cx}{c}$ mas el interes $\frac{abc+ab^2-bcx}{c^2}$ y quitando x, que debe pagar al cabo del 2.º año queda $\frac{ac+ab-cx}{c} + \frac{abc+ab^2-bcx}{c^2} - x$, y reduciendo todo á comun denominador es $\frac{ac^2+abc-c^2x+abc+ab^2-bcx-c^2x}{c^2}$ cuya fraccion reduciendo los terminos semejantes del numerador se reduce á la que se sigue $\frac{ac^2+2abc+ab^2-2c^2x-bcx}{c^2}$ expresion del principal que corresponde al principio del ter-

cer año, cuyo redito al fin de este ter cer año será $\frac{ac^2+2abc+ab^2-2c^2x-bcx}{c^2} \times \frac{b}{c} = \frac{abc^2+2ab^2c+ab^3-2bc^2x-b^2cx}{c^3}$ q.^e agregado al pral resulta que el deudor tiene de pral al cabo del ter-cer año $\frac{ac^2+2abc+ab^2-2c^2x-bcx}{c^2} + \frac{abc^2+2abc^2+ab^3-2bc^2x-b^2cx}{c^3}$ y restando x es el resto la misma expresion $-x$, el q.^e redu-cido á la mayor ó comun denomi-nacion c^3 resulta la expresion $\frac{ac^3+2abc^2+ab^2c-2c^3x-bc^2x+ac^2b+2ab^2c+ab^3-2bc^2x-b^2cx-c^3x}{c^3}$ y reduciendo los termi-nos semejantes será $\frac{ab^3+3ab^2c+3abc^2+ac^3-3c^3x-3bc^2x-b^2cx}{c^3}$ cuya expresion es lo q.^e el deudor debe al principio del año 4.º

Supongamos ahora q.^e el pral y reditos deben satisfacerse en

tres libranzas q.s hechas al fin de cada año, es evidente, q.e en este caso la ultima expresion hallada es $=0$ de donde esta equacion $\frac{ab^3+3ab^2c+3abc^2+ac^3-3c^3x}{c^3}$ $\frac{-3bc^2x-b^2cx}{c^3}=0$ multiplicando todo por c^3, y transponiendo los terminos negativos viene ab^3+3ab^2c $+3abc^2+ac^3=3c^3x+3bc^2x+b^2cx$, y partiendo por los coeficientes de x viene $x=\frac{ab^3+3ab^2c+3abc^2+ac^3}{3c^3+3bc^2+b^2c}=$ $\frac{a}{c}\left(\frac{b^3+3b^2c+3bc^2+c^3}{3c^2+3bc+b^2}\right)$ pues la letra a se halla en todos los terminos del numerador, y la c en todos los del Denominador por cuyo motibo se ha puesto aparte el factor $\frac{a}{c}$,

Examinando ahora con atencion el numerador del valor de x veo, que es el cubo de $b+c$ lo q.e muda este valor en la forma sig.te $x=\frac{a}{c}\left(\frac{\overline{b+c}^{\,3}}{3c^2+3bc+b^2}\right)$

Si en este nuebo valor de x multiplico el Denominador $3c^2+3bc+b^2$ por b, y le añado c^3 viene $c^3+3c^2b+3cb^2+b^3$ cubo tambien de $b+c$; pero como al valor de x no debe mudar, no se puede multiplicar su denominador por b sin multiplicar tambien su numerador por la misma b ni puedo quitar c^3 del mismo denominador sin añadirselo tambien multiplico pues arriba, y abajo por b, y añadiendo, y quitando c^3 del denominador resulta $x = \frac{ab}{c}\left(\frac{\overline{b+c}^3}{c^3+3bc^2+3b^2c+b^3-c^3}\right)$ $= \frac{ab}{c}\left(\frac{\overline{b+c}^3}{\overline{b+c}^3-c^3}\right)$ y como este valor de x hallado para 3 años es el cubo de $b+c$ partido por el cubo de $b+c$ — el cubo de c, y el todo multiplicado por $\frac{ab}{c}$, ó por el redito, q.e corresponde al prestamo al fin del primer año, se sigue q.e para un numero N de d.s vendra $x = \frac{ab}{c}\left(\frac{\overline{b+c}^n}{\overline{b+c}^n-c^n}\right)$ lo q.e significa

q.e lo que se debe pagar cada año es el rédito del primer año multiplicado por la suma de 100 con el tanto por 100 elevada á la potencia señalada por el numero de años, partido por esta misma potencia menos 100 elevado a la potencia misma.

Para dar una aplicación de esta regla sea el prestamo $a = 1000$ p.s y el interes á 3 por 100 será $b=3$, $c=100$, y el plazo en que el pral, é interes deben satisfacerse en el de 3 a.s por lo que $n=3$; substituyendo estos valores viene

$$x=\frac{1000 \cdot 3}{100}\left(\frac{\overline{100+3}^{3}}{\overline{100+3}^{3}-100^{3}}\right)=$$

$$300\left(\frac{103^{3}}{103^{3}-100^{3}}\right)=300\left(\frac{1092727}{1092727-1000000}\right)=$$

$$353\frac{29155}{92727}=353,30363 \text{ p.}^{\text{os}}$$

en efecto 108 p.s al cabo del año á 3 p.r 100 valen 108300 p.s pagando 3535, 30363 se queda á deber 6764, 69637 cuyo interes á 3 por 100 es 202, 94089 luego al cabo del año 2.º viene á deber 6967, 63726, y pagando los 3535, 30363. se queda á deber 3432, 33363 cuyo interes á 3 por 100 es 102, 97 y por consig.te debe al cabo de los 3 a.s 3535, 30363 p.s y pagando 3535, 30363 no queda á deber nada.

Problema 5.

Dados los valores intrinsecos de dos materias hacer con ellas una mescla cuyo valor sea determinado.

Exp.on

Sea A el valor de una onza de una de las dos materias, y B el valor de la onza de la otra materia; y la porcion de onza, que se ha de tomar de la materia 1.a e y la porcion q.e se

ha de tomar de onza de la mate-
ria 2.ª para componer entre las dos
una onza del valor determ.do c.

Solución.

Supuesto esto; es evidente q.e $x+y$
$=1$; por otra parte el precio de la
porcion x de la materia 1.ª es ax; el
precio de la porcion y de la materia
2.ª es by, y estos dos precios han de
componer la quantidad c, luego ax
$+by=c$; las dos equaciones son
$x+y=1$; y $ax+by=c$ multiplico
la 1.ª por a coeficiente de x en la 2.ª
y será el producto $ax+ay=a$,
y restando esta equacion de la 2.ª
es el resto $by-ay=c-a$, y por
consig.te $y=\frac{c-a}{b-a}$. Multiplican-
do del mismo modo la equacion
1.ª por b coeficiente de y en la 2.ª
es el producto $bx+by=b$, y res-
tando esta equacion de la 2.ª ax
$+by=c$ es el resto $ax-bx=c-b$,

luego $x = \frac{c-b}{a-b}$

Aplicacion.

Se ha propuesto hacer una mescla de oro, y Plata, el valor de 60 rs. la onza con oro de 80 rs. y plata de 20 rs. la onza con estos datos tengo $a = 80$, $b = 20$, $c = 60$, x la porcion de oro, q.e se ha de tomar, é y la de plata.

Substituyendo estos valores en las formulas $x = \frac{c-b}{a-b}$ é $y = \frac{c-a}{b-a}$

resulta $x = \frac{60-20}{80-20}$ é $y = \frac{60-80}{20-80}$

luego $x = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ de onza de oro, é $y = \frac{-20}{-60} = +\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ de onza de plata.

Problema 6.

Se pide un numero cuya mitad, tercio, y quarta parte juntas compongan 39.

Explicacion.

Sea x este n.º y $a = 39$ pidese &c.

Solucion.

La naturaleza dela question dá $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=a$, multiplico todo por 12 para quitar los quebrados, y viene $6x+4x+3x=12a$, parto á 13 coeficiente dela x, y viene $x=\frac{12a}{13}$; y substituyendo en lugar de a su valor sera $x=\frac{12.39}{13}=36$.

Problema 7

Repartir una cantidad de dinero entre tres personas de modo que la 1.ª tenga cierto numero de veces mas que la 2.ª menos una cierta cantidad, la 2.ª un cierto n.º de veces mas q.e la 3.ª menos cierta cantidad, se pregunta lo q.e toca á cada una de ellas.

Expon.

Sea a la cantidad de dinero. m las veces q.e la 1.ª persona

contiene al caudal, ó parte dela 2.ª y p la quantidad, q.e hà de tener menos; sea n las veces, que la 2.ª contiene à la 3.ª y q la cantidad, q.e ha de tener menos.

Solucion.

Sea x la parte dela 3.ª persona, y segun las condiciones propuestas la parte dela 2.ª persona serà $nx-q$, y la dela 1.ª $mnx-mq-p$ de modo, q.e la suma de estas 3 partes $mnx-mq-p+nx-q+x=a$, y trasponiendo para dexar en un miembro los terminos en que se halla x serà $mnx+nx+x=a+mq+p+q$, y partiendo por los coeficientes de x serà $x=\frac{a+mq+p+q}{mn+n+1}$.

Aplicacion.

Sea $a=928$ p.s y supongo que la 1.ª persona tiene 11 veces mas q.e

la 2.ª menos 13 pesos, y la 2.ª 17 veces mas q.e la 3.ª menos 7 p.s estas suposiciones dan $a=928$, $m=11$, $n=17$, $p=13$, $q=7$, y substituyendo en la formula en lugar de las letras sus valores viene $x=$

$$\frac{928.+77+13+7}{187+17+1}=\frac{1025}{205}=5$$

parte dla 3.ª persona, y siendo la parte dla 2.ª $nx-q$ substituyendo viene $17.5-7=85-7=78$ parte dla 2.ª, y siendo la parte dela 1.ª $mxn-mq-p$ substituyendo serà $11.17.5-11.7-13=935-77-13=935-90=845$ parte dela 1.ª persona, y la suma dl las 3 partes 928.

Las questiones resp.tas en los dos problemas anteriores se conocen en Arithmetica por reglas dl falsa posicion, y se resuelven suponiendo un n.o sobre el qual se

hacen las operaciones indicadas en ella, como si fuera el verdadero numero buscado, despues comparando la suma de los resultados con la suma dada, ô cada una de sus partes con las condiciones propuestas por reglas de proporciones se sacan las verdaderas cantidades buscadas; de este modo ai reglas de una, dos, ô mas falsas posiciones, pero todas ellas se resuelven por algebra del mismo modo, y con la misma facilidad.

Problema 8.

Dos correos salieron de distintos sitios, y caminando rectamente asia una misma parte partieron con cierta dif.ª de oras, y leguas, el Correo 1.º anda cierto n.º de leguas en cierto tiempo, y el 2.º anda tambien cierto n.º de leguas

en otro cierto tiempo, pidese el punto de su carrera en que deben encontrarse.

Explicacion.

Sean A y B los puntos de donde partieron los correos, y por consig.te será la distancia de uno á otro $AB = a$ leguas, sea tambien la dif.a de horas $= c$, sea b el n.o de leguas, q.e anda el correo 1.o en el tiempo S, y d las leguas, que anda el 2.o correo B en el tiempo t, se pregunta en q.e punto x de su carrera deben encontrarse.

Solucion.

Si el correo B sale antes q.e el correo A de la cantidad de horas c, y corre las leguas d en el tpõ t es claro, q.e en el tpõ c havrá andado ya las leguas $\frac{cd}{t}$ representadas estas leguas en la fig.a por BC las q.e serán positivas si

el correo B salió antes, q.e el correo
A, y negativas si al contrario de
modo, q.e al punto, q.e el correo A
sale del punto A se debe suponer
(en el primer caso) q.e el correo le sa
le del punto C, y en el caso 2.o de C'
esto sup.to, y q.e X es el punto en q.e
se han de encontrar se harà

CX ó $C'X = x$.

A —— C' —— B —— C —— X

Se buscarà el tiempo q.e el correo
B se empleará en correr x, y el ti-
empo q.e el correo A empleará en cor-
rer de AX, ó $AB + BC + CX$ ó $a +$
$\frac{cd}{z} + x$, y como estos dos tiempos son
ig.s pues salen á un tiempo el uno
de A, y el otro de C, y se deben al-
canzar; de la expresion de estos
dos tiempos se harà una equa-
cion, en q.e dejando x se tendria
la distancia buscada. Digo pu-
es, si el 2.o correo anda las leg.s

d en el tiempo t es claro q.e andará las leguas x en el tiempo $\frac{tx}{d}$; también es cierto, q.e si el correo 1.º anda las leg.s b en el tiempo s andará las leg.s $a+\frac{cd}{t}+x$ en el tiempo $(a+\frac{cd}{t}+x)\frac{s}{b}$ luego $\frac{tx}{d}=(a+\frac{cd}{t}+x)\frac{s}{b}$, y multiplicado todo por bd viene $btx=ads+\frac{cd^2s}{t}+dsx$, y transponiendo será $btx-dsx=ads+\frac{cd^2s}{t}$ $=\frac{adsc+cd^2s}{t}$ y partiendo por $bt-ds$ resulta la equacion $x=\frac{adst+cd^2s}{bt^2-tds}$ equacion en q.e si el correo 1.º sale antes del 2.º la letra c se hase negativa, y da $x=\frac{adst-cd^2s}{bt^2-dst}$

Si en lugar de a, y en un mismo sentido los dos correos ban al encuentro el uno del otro en el caso de salir el correo B antes del correo A mirando CX

$-x$ como positivo en el valor 1.º de $x=\frac{adsz+cd^2s}{bz^2-dsz}$, a y b sean negativos, lo que mudaria esta formula en $x=\frac{-adsz+cd^2s}{-bz^2-dsz}$ $=\frac{adsz-cd^2s}{bz^2+dsz}$ y si el correo A sale antes, que el correo B resulta $x=\frac{adsz+cd^2s}{bz^2+dsz}$ suponiendo entonces el punto C del otro lado de B respecto á A en la fig.ª

Si los dos correos salieron á un tiempo el uno de A, y el otro de B en este caso la letra c será ig.l cero, y se tendrá $x=\frac{ads}{bz\mp ds}$ el signo $-$ quando los correos van en un mismo sentido, y el signo $+$ quando van en sentido contrario. La aplicacion á los diferentes casos, q.e puedan acontecer es facil, solo advertiremos, q.e en algunos de ellos la solucion se hace imposible, y esto susede quando yen-

do los dos correos en un mismo sentido el q.e está mas adelante corre igualm.te ó mas q.e el otro, ó quando yendo en sentido contrario, y saliendo en diferentes tiempos el uno alcanza el sitio del otro antes del salir el; pero de qualquier modo substituyendo numeros en lugar de letras la misma formula dirá si el problema es posible, ó no.

En efecto en la 1.a formula $x = \frac{adst \pm cd^2s}{bt^2 - dst} = \frac{ds}{t}\left(\frac{at \pm cd}{bt - ds}\right)$ q.e pertenece al caso en q.e los correos van en un mismo sentido, si $bt = ds$, tambien $bt - ds = 0$, da $x = \infty$ (este signo ∞ quiere decir infinito) pues $bt = ds$ significado, q.e los dos correos andan con ig.l velocidad claro está q.e nunca se pueden alcanzar.

ó, saliendo el correo A antes del correo B en cuyo caso de + se toma el signo — los datos dan $ab = cd$ resulta $x = 0$, y significa que el correo A alcanzarà al correo B en el mismo punto B en el instante en que este correo 2.º iba à salir.

Problema 9.

Buscar dos numeros cuya suma sea 30, y su producto 224

Expli.on

Sean x è y los dos numeros buscados $a = 30$. $b = 224$.

Solucion.

La question puesta en equacion es $x + y = 30 = a$, $xy = b$, multiplicando la equacion 1.ª por x serà el producto $x^2 + xy = ax$ del que restando la 2.ª equacion es el resto $x^2 = ax - b$ y transponiendo para dexar en un miembro los terminos, que tienen la incognita serà $x - ax = -b$,

despues completando el quadrado añadiendo el quadrado de la mitad del coeficiente de x, $\frac{a^2}{4}$ será $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$ extrayendo $\sqrt[2]{}$ de una, y otra parte $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ y transponiendo $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ $= \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{30\sqrt{900 - 884}}{2}$ $= \frac{30 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{30 \pm 4}{2} = 17$ y 13, y son los dos valores buscados. En efecto $17 + 13 = 30$, y $17 \times 13 = 221$.

$x - \frac{a}{2}$ y su quadrado

Problema 10.

Buscar un número tal, que quitando su quadruplo de su quadrado, que de 21.

Expon. y Solucion.

Sea x este número, su quadruplo es $4x$ su quadrado x^2 luego puesto en equacion el problema será $x^2 - 4x = 21$ completo el quadrado añadiendole el quadrado de la

raiz del cu. re nte de x, y resul tará la equacion $x^2-4x+4=21$ $+4=25$, y extrayendo √ de am bos miembros es $x-2=\pm\sqrt{25}=\pm 5$, y transponiendo sera $x=2\pm 5=7$ ó -3 esto es q.e 7 y -3 satisfacen ig.l m.te ala question.

Comprobacion

El quadruplo de 7 es 28, y su quadrado 49 del que quitando el quadruplo 28 queda 21 q.e es lo q.e se pide.

tambien el quadruplo de -3 es -12, y su quadrado 9 de el qual quitando el -12 es el resto 21, q.e es lo que se pide.

Problemas indeterminados.

244.... Problemas indetermina dos son aquellos, que tienen ma yor n.o de incognitas, q.e de con diciones; la resolucion comple ta de estas especies de questiones ofrece varias dificultades, cuya

explicacion no nos permite entrar la brebedad de un curso publico; solo daremos aqui algunos exemplos de los mas faciles, que den á conocer lo que tienen si.

Problema V.

Se ha propuesto partir 25 en dos partes tales, que la una sea divisible por dos, y la otra por 3.

Solucion.

Sea la 1.ª de las dos partes buscadas $2x$, y la 2.ª $3y$, luego $2x+3y=25$, y por consig.te $2x=25-3y$ esto sup.to veo, q.e para q.e x sea n.o entero es preciso q.e la cantidad $3y$ que se resta de 25 sea impar, hago y sucesivam.te igual 1, 3, 5, 7, 9, &c.ª por estas suposiciones la equacion $2x=25-3y$, se muda en $2x=25-3=22$.

$2x = 25 - 9 = 16$
$2x = 25 - 15 = 10$
$2x = 25 - 21 = 4$ de donde los valores de x correspondientes á los de y son 11, 8, 5, 2 por donde es, que los valores de y siguen una progresion de terminos, cuya dif.ª es el coeficiente de x en la equacion que el producto, esto es del Problema, y los valores de x otra progresion de terminos, cuya dif.ª es el coeficiente de y en la misma equacion.

Problema 2.º

Se nos propone partir 100 en dos partes tales, q.e la una sea divisible por 7, y la otra por 11.

Solucion.

Sea $7x$ la 1.ª parte, y $11y$ la 2.ª y tendremos la equacion $7x + 11y = 100$, y transponiendo es $7x = 100 - 11y$, y despejando la x viene $x = \frac{100 - 11y}{7} = 14 - y + \frac{2 - 4y}{7}$ luego es menester q.e $\frac{2 - 4y}{7}$ sea un nume-

"ro entero estoes q.e $4y-2$ sea divisible por 7 y por consig.te $2y-1$ tambien; hago pues $2y-1 = 7z$, y transponiendo sera $2y = 7z+1$ y despejando la y sera $y = \frac{7z+1}{2} = 3z + \frac{z+1}{2}$, y como para q.e y sea un numero entero es menester q.e $z+1$ pueda partirse por 2 veo que puedo hacer z = á todos los numeros impares 1, 3, 5, 7, 9, &c.a hasta llegar á un numero, q.e haga x ó y = á un numero negativo. pongo pues 1 por z en la equacion $y = 3z + \frac{z+1}{2}$ y viene $3 + \frac{1+1}{2} = y = 4$, y substituyendo 4 en lugar de y en la equacion $x = 14 - y + \frac{2-4y}{7}$ viene $x = 14 - 4 + \frac{2-16}{7} = 8$, y si en lugar de x, é y pongo estos valores en la equacion $7x + 11y = 100$ veo q.e los dos numeros 56 y 44 q.e resultan de la substitucion satis-

facen à la question.

Si pongo 3 por z en la equacion $y=3z+\frac{z+1}{2}$ vendrá $y=9+\frac{3+1}{2}=11$, y substituyendo 11 por y en la equacion $x=14-11+\frac{2-44}{7}=3-\frac{42}{7}=3-6=-3$ de donde se ve, q.e haciendo $z=3$ resulta x negativo, y por consig.te q.e el problema no tiene mas q.e una resolucion.

Prob.a 3.o

Un platero ha comprado 3 especies de metales de plata la 1.a á 7 onzas de fino por marco, la 2.a á $5\frac{1}{2}$ onzas, y la 3.a á $4\frac{1}{2}$ y quiere hacer 30 marcos de metal de la mescla de los 3. q.e contenga 6 onzas de plata fina por marco, se pregunta quanto se ha de tomar de cada especie.

Exp.on

Sea x el numero de marcos q. se ha de tomar de la 1.a especie, y el numero de marcos de la 2.a y z el numero de marcos de la 3.a

Solución.

"Es evidente, q.e $x+y+z=30$ despues si se considera, q.e el primer metal contiene 7 onzas d fino por marco, en x marcos entraran $7x$ onzas d fino, el 2.o metal teniendo 5½ onzas d fino por marco tendrá en y marcos $5\frac{1}{2}y$ onzas d fino, el 3.o metal teniendo 4½ onzas d fino por marco tendrá en z marcos $4\frac{1}{2}z$ onzas d fino; en fin los 30 marcos debiendo ser d 6 onzas d fino por marco componen 180 onzas d fino en todo d donde es la 2.a equacion $7x+\frac{11}{2}y+\frac{9}{2}z=180$, y multiplicando todo por 2 resultará la equacion $14x+11y+9z=360$, y multiplicando la primera equacion $x+y+z=30$ por 9 resulta la equacion $9x+9y+9z=270$ la q.e restada d la anterior $14x+11y$

$+ 9z = 360$ viene al resto la equa-
cion $5x + 2y = 90$, equacion, que
debe dar en numeros enteros los va-
lores de x é y en quanto al de z se
sacará de la equacion $z = 30 - x - y$:
luego la suma de los valores de x é
y no puede pasar de 30, esto supues-
to, la equacion antecedente da
$2y = 90 - 5x$, y despejando y resul-
ta $y = 45 - \frac{5x}{2}$ en q.e x debe ser un
numero par para poder partir-
se por 2, y no puede baxar del va-
lor de 10, pues si se hace $x = 8$ re-
sulta $y = 25$ marcos los que con
los 8 marcos del valor de x com-
ponen 33 marcos en lugar de 30,
que ha de haber haciendo pues
susesivam.te $x = 10, 12, 14, 16, 18 \ldots$ &c.
substituyendo en $y = \underline{90 - 5x}$ vie-
ne $y = 20, 15, 10, 5, 0$, y substitu-
yendo en $z = 30 - x - y$ viene ulti-
mam.te $z = 0, 3, 6, 9, 12$, y de todos

„ modos resultan los 30 maxicos, como se ve

$x=10$	12	14	16	18
$y=20$	15	10	5	0
$z=0$	3	6	9	12
30	30	30	30	30

Adonde se ve, q.e los valores d x siguen una progresion ascendente cuya dif.a es ig.l al coeficiente d y en la equacion $5x+2y=90$; los valores d y una progresion descendente cuya dif.a es ig.l al coeficiente d x en la misma equacion, q.do los valores d z, siguen una progresion ascendente, cuya dif.a es ig.l á la dif.a d los coefientes d x é y en la equacion general, y es en efecto lo q.e enseñan los libros d arithmetica, q.e tratan d estas especies de questiones, y queda demonstrado en las formulas algebricas.

245.... En los Problemas inde-
terminados del 2.º grado, quando
se quiere determinar el valor de
una incognita elevada al quadra-
do es menester, q.e el valor sup.to
sea tàl, q.e el quadrado de la 1.a no
se haga negativo pues en este
caso las raizes de esta se haran
imposibles assi en la equacion
$x^2+y=100$ si se propone hallar
el valor de x en numeros enteros
solo se puede suponer $y=0, 19, 36,$
$51, 64, 75, 84, 91, 96, 99, 100$, en
cuyo caso $x=10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3,$
$2, 1, 0$, pero pasando y de 100 el
valor de x^2 se hace negativo, y
su raiz imposible por ser $x^2=100-y$
Los que desearen instruirse mas
à fondo en esta theorica de los pro-
blemas indeterminados deben con-
sultar la Algebra Eulero en donde
està tratada con mucha extencion.

Problema 1º.

Pedro haviendo ydo à Madrid gastò en el primer dia la tercia parte del dinero q.e lle baba, en el 2.º dia la quarta parte, y en el 3.º la quinta parte del mismo dinero de suerte q.e solo le quedaron 26 p.s se pregunta quanto dinero tenia.

Este problema, y los q.e siguen se ponen à los principiantes sin resolver para exercicio de las reglas, y assi solo pondremos

Calculo.

con una incognita x

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 26.$$

multiplicando por 60 es

$$60x - 20x - 15x - 12x = 1560$$

reduciendo $13x = 1560$

despejando $x = 120$ nº pedido.

Prueba.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{120}{3}=40\\[4pt] \frac{120}{4}=30\\[4pt] \frac{120}{5}=24\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}40+30+24=94\\[4pt] 120-94=26\end{array}$$

Con 4 incognitas.

$x=$ al nº. $\quad x-u-y-z=26$

$$\left.\begin{array}{l}u=\frac{x}{3}\\[4pt] y=\frac{x}{4}\\[4pt] z=\frac{x}{5}\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{substituyendo}\\[4pt] x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=26\end{array}$$

&c.

Problema 2º.

Un platero compra en 1272 rs. un pedazo de metal compuesto de 3 onzas de oro, y 5 de plata; y en 2088 rs. otro pedazo de metal compuesto de 5 onzas de oro, y 7 de plata, se pregunta ā como le sale u[illegible]nza de oro, y la de plata.

Calculo

$y = 1$ onza de oro

$z = 1$ onza de plata

$a = 1272$

$b = 2088$

$3y + 5z = a$, y $3y = a - 5z$, ó $y = \frac{a - 5z}{3}$

Equacion 2.ª

$b = 5y + 7z = 5\left(\frac{a - 5z}{3}\right) + 7z = \frac{5a - 25z}{3} + 7z$

$3b = 5a - 25z + 21z = 5a - 4z$

$4z = 5a - 3b$

$z = \frac{5a - 3b}{4}$ Valor de una onza de Plata.

Substituyendo este valor en la equacion 1.ª es

$y = \frac{a - 5\left(\frac{5a - 3b}{4}\right)}{3}$

$3y = a - 5\left(\frac{5a - 3b}{4}\right) = a - \frac{25a + 15b}{4}$

$12y = 4a - 25a + 15b = -21a + 15b = 15b - 21a$

$y = \frac{15b - 21a}{12}$ Valor de 1.ª onza de oro.

Substituyendo numeros.

$$z = \frac{5 . 1272 - 3 . 2088}{4} =$$

$$\frac{6360 - 6264}{4} = \frac{96}{4} = 24 \text{ xs.}$$

$$y = \frac{15 . 2088 - 21 . 1272}{12}$$

$$= \frac{31320 - 26712}{12} = \frac{4608}{12} =$$

384 xs.

Comprobación.

onz. de oro. 3×384 xs. $= 1152$

onz. de plata. 5×24 xs. $= 120$

$1152 + 120 = 1272$ xs.

onz. de oro 5×384 xs. $= 1920$

onz. de plata $7 \times 24 = 168$

$1920 + 168 = 2088$ xs.

Problema 3º.

" Pedro, Santiago y Juan han perdido todo su dinero, Pedro y Santiago han perdido 10 ps.; Pedro, y Juan 11 ps. Santiago y Juan 9 ps. se pregunta quanto ha perdido cada uno de los jugadores.

Calculo.

Equacion 1ª .... $x+y=10$

Equacion 2ª .... $x+z=11$

Equacion 3ª .... $y+z=9$

Perdida de Pedro .... $x=6$

Perdida de Santiago ..... $y=4$

Perdida de Juan .... $z=5$

$x=10-y$

Substituyendo el valor de x en la equacion 2ª

$10-y+z=11$

$z=11-10+y=1+y$

Substituyendo el valor de z en la equacion tercera es

$y+1+y=9$
$2y=9-1=8$
$y=4$
Substituyendo este valor de y en
la equacion 1.ª es
$x+4=10$
$x=10-4=6$
Substituyendo este valor de x en
la equacion 2.ª es
$6+z=11$
$z=11-6=5.$

Comprobacion.

$6+4=10;\ 6+5=11;\ 4+5=9$

Problema 4.º

Un pobre decia á otro si tu me das
$\frac{1}{4}$ tendremos uno y otro ig.l numero
de quartos; pero si yo te doy un qu-
arto de los mios el numero de quar-
tos, que me quedarán seran la mi-
tad de los q.e tendras. En este caso

se pregunta quantos quartos tenia uno, y otro pobre.

Calculo.

Pobre 1.º .... $x = \frac{5}{4}$

Pobre 2.º .... $z = \frac{7}{4}$

equaciones. $\begin{cases} 1.^a \ldots\ldots x + \frac{1}{4} = z - \frac{1}{4} \\ 2.^a \ldots 2(x - \frac{1}{4} = z + \frac{1}{4} \end{cases}$

$x = z - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = z - \frac{2}{4}$

Substituyendo el valor de x en la equacion 2.ª es

$2\left(z - \frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) = z + \frac{1}{4}$

$2z - \frac{4}{4} - \frac{2}{4} = z + \frac{1}{4}$

$2z - z = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \quad z = \frac{7}{4}$

Pobre 2.º Substituyendo el valor de z en la equacion 1.ª es

$x + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}$

$x = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ .... Pobre 1.º

Comprobacion.

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}$$

$$2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}$$

Prob.ᵃ 5.º

Pedro, y Juan antes de Jugar tenian igual cantidad de dinero, Pedro ha perdido 12 p.s y Juan 57 p.s de suerte q.e al salir del Juego Pedro tenia quatro veces mas dinero q.e Juan; se preg.ta quanto dinero tenian antes de Jugar.

Calculo.

Pedro sea ..... $x = 72$

y Juan .... $s = 72$

$x = s$

$x - 12 = 4(s-57) = 4s - 228$

$4s = x - 12 + 228 = x + 216$

$s = \frac{x+216}{4}$

Substituyendo en la equacion $z=s$ el valor de s viene

$$z=\frac{z+216}{4}$$

$$4z=z+216$$

$$216=4z-z=3z$$

$$z=72=s$$

Prueba.

$$72-12=60=4(s-57)=4s-228$$

$$60+228=288=4s$$

$$s=72$$

Prueba 2ª

$$72-12=60=(72-57)4=(15).$$
$$4=60.$$

Problema 6º

Preguntandole á un pastor quantas ovejas trahe; responde: si Vd junta la mitad, el tercio, y quarta parte de las ovejas q.e tengo la suma exede en 7 al nº de mis

ovejas; se pregunta quantas obejas tenia.

Calculo.

Sea el n.º de obejas ..... $x = 84$

$x + 7 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$

$12x + 84 = 6x + 4x + 3x = 13x$

$84 = 13x - 12x = x = \underline{84}$

Prueba.

$$84 : \left\{\begin{matrix} 2 = 42 \\ 3 = 28 \\ 4 = 21 \end{matrix}\right\} = 91 > 84 \text{ en } 7$$

Problema.

Vn mercader compra tres cavallos el valor del 1.º con la mitad de los otros dos asiende à 25 doblones, el valor del 2.º con el tercio del de los otros dos â 26 doblones, y el valor del 3.º con la mitad del de los otros Dos â 29 doblones se pregunta quanto ha

costado cadauno de los tres cavallos.

Cavallos $\begin{cases} 1^{o} \ldots\ldots x = 8 \\ 2^{o} \ldots\ldots y = 18 \\ 3^{o} \ldots\ldots z = 16 \end{cases}$

Question puesta en equacion.

$$x + \frac{y+z}{2} = 25$$

$$y + \frac{x+z}{3} = 26$$

$$z + \frac{x+y}{2} = 29$$

Solucion.

$$x + \frac{y+z}{2} = 25$$

$$2x + y + z = 50$$

$$2x = 50 - y - z$$

$$x = \frac{50 - y - z}{2}$$

$$y + \frac{x+z}{3} = 26$$

$$3y + x + z = 78$$

Y subtituyendo el valor de x en esta ultima equacion viene

$$3y+\frac{50-y-z}{2}+z=78$$

$$6y+50-y-z+2z=156$$

$$5y+50+z=156$$

$$5y=156-50-z=106-z$$

$$y=\frac{106-z}{5}$$

$$z+\frac{x+y}{2}=29$$

$$2z+x+y=58$$

Subtituyendo el valor de x en esta ultima equacion viene

$$2z+\frac{50-y-z}{2}+y=58$$

$$4z+50-y-z+2y=116$$

$$3z+y+50=116$$

$$3z+y=116-50=66$$

Subtituyendo el val. de y en esta ultima equacion viene

$$3z+\frac{106-z}{5}=66$$

$$15z + 106 - z = 330$$
$$14z + 106 = 330$$
$$14z = 330 - 106 = 224$$
$z = 16$ .... Cavallo 3.º

Substituyendo este valor de z en la equacion $y = \frac{106 - z}{5}$ viene

$y = \frac{106 - 16}{5} = \frac{90}{5} = 18$.. Cavallo 2.º

Substituyendo los valores de z, é y en la equacion $x = \frac{50 - y - z}{2}$ viene

$$x = \frac{50 - 18 - 16}{2} = 25 - 9 - 8 =$$
$25 - 17 = 8$ ..... Cavallo 4.º

Prueva.

$$8 + \frac{18 + 16}{2} = 8 + 9 + 8 = 25$$
$$18 + \frac{8 + 16}{3} = 18 + \frac{24}{3} = 18 + 8 = 26$$
$$16 + \frac{18 + 8}{2} = 16 + 9 + 4 = 29$$

Problema 8.º

Un peon teniendo 24 rs. recibe el prest de 4 dias de trabajo à los

15 días despues no le queda mas d.
la quarta parte d. todo su dinero,
pero haviendo recibido lo q.e le
debian por estas dos semanas se
encuentra con 84 rr.s se pregun-
ta q.to ganaba por semana?
Prest d. un día .... $x = 5\frac{1}{5}$ rr.s
d. la semana .... $7x = 36\frac{2}{5}$ rr.s

Question puesta en equacion:

$$\frac{24+4x}{4} = 6+x$$

$$6+x+14x = 84$$

$$15x = 84-6 = 78$$

$x = 5\frac{3}{15} = 5\frac{1}{5}$ Prest d.l Dia.

$5\frac{1}{5} \times 7 = 36\frac{2}{5}$ d. la Semana.

Prueba.

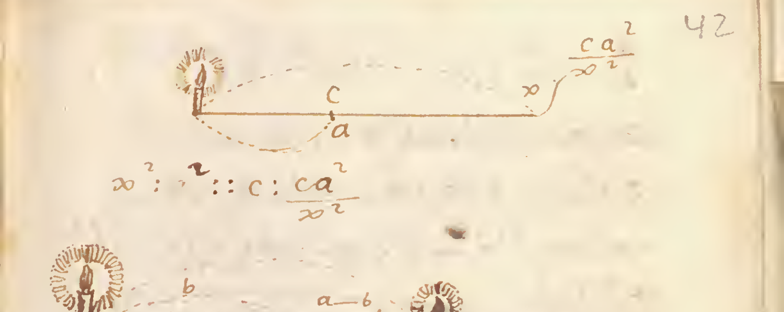
$24+4\left(5\frac{1}{5}\right) = 24 + 20\frac{4}{5} = 44\frac{4}{5}$:
$:4 = 11\frac{1}{5} + 2\left(36\frac{2}{5}\right) = 11\frac{1}{5} + 72\frac{4}{5} =$
$= 84$ rr.s

Problema 9.

Dadas dos luces de diferente tamaño, y conocidas sus intensidades á una determinada distancia se pide el punto en que dhas luces alumbraran igualmente.

Escolio.

En Optica está demonstrado (y suponemos aquí esta demonstracion) que la luz esparcida por un cuerpo luminoso disminuye de intensidad en razon inversa del quadrado de las distancias á este mismo cuerpo; esto es, que este cuerpo alumbra 4 veces menos á una distancia doble, 9 veces menos á una distancia tripla &c. assí en general si á una distancia á la claridad, que dá es c a una distancia x la claridad será $\frac{c.a^2}{x^2}$



Expᵒⁿ

Sean las dos luces C, D, y á una misma distancia 1, 1 colocada las luces c, d, sea conocida la intensidad de cada una $c=4$ y $d=1$, sea la distancia entre las dos luces $a=60$, se pide el punto x en donde alumbraran igualmᵗᵉ esto es conocer las distancias b y $a-b$

Calculo.

$x : c :: 1 : b^2$ $\qquad$ $d : x :: (a-b)^2 : 1$

$x b^2 = c$ $\qquad$ $d = x(a-b)^2$

$x = \frac{c}{b^2}$ $\qquad$ $x = \frac{d}{(a-b)^2}$.

$$\frac{c}{b^2} = \frac{d}{(a-b)^2}$$

$$c.(a-b)^2 = b^2 d$$

$$ca^2 - 2bca + b^2c = b^2 d$$

$$ca^2 = b^2d - b^2c + 2abc = (d-c)b^2 + 2acb$$

$$b = \frac{-2ac \pm \sqrt{4.(d-c).ca^2 + 4a^2c^2}}{2.(d-c)}$$

$$b = -\frac{ac}{d-c} \pm \sqrt{\frac{ca^2}{d-c} + \frac{c^2a^2}{(d-c)^2}}$$

$$b = a\left(-\frac{c}{d-c} \pm \sqrt{\frac{c}{d-c} + \frac{c^2}{(d-c)^2}}\right.$$

que es valor de la distancia b expresado en cantidades conocidas de a, c, d.

Substitucion numerica

$a = 60$, $c = 4$, $d = 1$ } luego $d - c = 1 - 4 = -3$

$$b = 60\left(\frac{-4}{-3} \pm \sqrt{\frac{4}{-3} + \frac{16}{9}}\right. = 60\left(\frac{4}{3} \pm \sqrt{-\frac{12}{9} + \frac{16}{9}}\right) = 60\left(\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}\right)$$

$= 60\left(\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}\right)$

Tomando la $\sqrt{}$ positiva resulta
$b = 60\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) = 60\left(\frac{6}{3}\right) = 60 \cdot 2$
$= 120 = b = B.$

Luego tomando sobre la luz menor otras 60 baxas, q.^{e} componen 120 a la luz mayor alumbran las luzes igualm.^{te}

Tomando la $\sqrt{}$ negativa resulta
$b = 60\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) = 60 \cdot \frac{2}{3} = 40$

Luego á 40 baxas dla luz grande, y 20 dela pequeña alumbran tambien igualm.^{te}

La prueba es q.^{e} con estas distancias las intensidades buscadas han de salir ig.^{s}

En el caso 1.º

$x : 4 :: 1 : \overline{120}^2 = 14400$

$14400\,x = 4$

$x = \frac{4}{14400} = \frac{1}{3600}$ Yntensidad de la luz mayor.

$x : 1 :: 1 : \overline{60}^2 = 3600$

$3600\,x = 1$

$x = \frac{1}{3600}$ Yntensidad de la luz menor.

En el caso 2.º

$4 : x :: \overline{40}^2 : \overline{1}^2$

$4 = \overline{40}^2 . x = 1600\,x$

$x = \frac{4}{1600} = \frac{1}{400}$ Yntensidad de la luz mayor

$1 : x :: \overline{20}^2 : \overline{1}^2$

$1 = \overline{20}^2 . x = 400\,x$

$x = \frac{1}{400}$ Yntensidad de la luz menor.

De las Resoluciones de las equaciones del 3.º grado.

226.... Para no alargar demasiado este curso solo daremos aqui la resolucion general de las equaciones del 3.º y quarto grado sin entrar en la explicacion de la aplicacion de las formulas q.^e à todos los casos posibles: para la perfecta inteligencia de esta theorica se debe acudir à los authores q.^e han tratado ex profeso de la Algebra, como son Lemaux, Balls, y otros

Sea la equacion general del 3.º grado $z^3+az^2+bz+c=0$ en que $a, b, c,$ son cantidades cono

cidas, positivas, ó negativas, y z
la incognita

Si aumento la incognita z del
coeficiente del 2.º termino (q.e es a)
partido por 3 exponente de z en
el termino 1.º viene.... $z + \frac{1}{3}a$

Yguallo esta expresion á otra
incognita x, y viene $z + \frac{1}{3}a = x$
Despejo la incognita z y viene
$z = x - \frac{1}{3}a$

Substituyendo en la equacion q.e
$z^3 + az^2 + bz + c = 0$ la canti-
dad $x - \frac{1}{3}a$ por la incognita
viene.. $z^3 = x^3 - ax^2 + \frac{1}{3}a^2x - \frac{1}{27}a^3$
$az^2 = \ldots\ldots ax^2 - \frac{2}{3}a^2x + \frac{1}{9}a^3$
$bz = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots bx - \frac{1}{3}ab$
$c = \text{-------------------} c$

Sumando estos terminos viene
$z^3 + az^2 + bz + c = x^3 + * + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)$
$x + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0$

Equacion en q.e la transformada, carece de segundo termino; hagase para simplificar el Calculo .... $b-\frac{1}{3}a^2=p$

$\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c=q$

Y transponiendo en la equacion antecedente p y q por sus valores se mudará la equacion general del tercer grado en .... $x^3+px+q=0$

Equacion en que se propone hallar el valor de x en valores de p y q, y para lograrlo hagase .... $x=y+z$

Y substituyendo y+z en lugar de x en la equacion $x^3+px+q=0$ resultará .... $\begin{cases} x^3=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3 \\ px=py+pz \\ q=q \end{cases}$

$x^3+px+q=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+py+pz+q=0$

Y sumando vendrá .... $x^3+px+q=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+py+pz+q$

En el segundo miembro de esta equacion ay dos variables, las quales se pueden tomar de modo que se tengan .... $y^3+z^3+q=0$

Quitando esta equacion de la anterior viene á quedar .... $3y^2z+3yz^2+py+pz=0$

Partiendo esta equacion por y+z es el quociente .... $3yz+p=0$

Despejando y viene .... $y=-\frac{p}{3z}$

Substituyendo el valor de y en la equacion $y^3+z^3+q=0$ viene .... $-\frac{p^3}{27z^3}+z^3+q=0$

Multiplicando por z^3 es el producto .... $-\frac{1}{27}p^3+z^6+qz^3=0$

Si en esta equacion se hace .... $z^3=a=$ ~~z^3~~ $z^3=u$

vendrá la equacion del 2.º grado .... $u^2+qu-\frac{1}{27}p^3=0$

cuyas dos raizes son .... $u=-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$

Substituyendo z^3 por u viene .... $z^3=-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$

Y despejando z viene .... $z=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$

Substituyendo este valor de z en la equacion $y^3+z^3+q=0$ viene .... $y^3+q-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=0$

y por consiguiente .... $y=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$

Pero hemos hecho $x=y+z$, luego .... $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$

Ô lo que es lo mismo .... $x=\begin{cases} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}} \\ \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}} \end{cases}$

Estos últimos valores de x son los mismos, q.e el antecedente, pues tomando en esta equacion los sig.nos inferiores, ô superiores de los radicales quadrados siempre so.le el ultimo valor de x; q.e se ha escrito.

Hayado de este modo uno de los tres valores de x se partirá la equacion del tercer grado por x menos este valor; la division debe hacerse sin resto, ô si el valor solo puede conseguirse aproxi.mando, el resto buscado podrà despreciarse, y resultarà una equacion del segundo grado cu.yas dos raizes completaràn la resolucion del problema.

Problema.

Vn Comerciante pone en el comer.cio 1.000$000, y queriendo reti.rarse â los tres años la Comp.a

le entrega una cantidad de dine-
ro tal, que añadida a la que hu-
viera tenido q.e darle si se huvi-
era retirado al fin del año pri-
mero, la suma asciende á
2.670.0875. se pregunta á q.to
por 100 asciende su ganancia
al año

Solucion...... Hagase......
1.000.0000 = a ....
..........100 = b .... Y el
tanto p.r 100. = u ....

Es evidente, q.e siendo á el pral
el interes al fin del primer año
será a.u:b, ó $\frac{au}{b}$ este interes
junto con el capital a hace
una suma $a + \frac{au}{b}$ que sirve de
pral para el segundo año cuyo
interes será como en el año pri-
mero $\left(a + \frac{au}{b}\right)\frac{u}{b} = \frac{au}{b} + \frac{au^2}{b^2}$
Este interes junto con su pral

compone $a+\frac{2au}{b}+\frac{au^2}{b^2}$, que es el principal del 3.º año, cuyo interes al fin de este 3.º año sera por consig.te $\left(a+\frac{2au}{b}+\frac{au^2}{b^2}\right)\frac{u}{b}=\frac{au}{b}+\frac{2au^2}{b^2}+\frac{au^3}{b^3}$, y este interes junto con su principal $a+\frac{2au}{b}+\frac{au^2}{b^2}$ compone la cantidad $a+\frac{3au}{b}+\frac{3au^2}{b^2}+\frac{au^3}{b^3}$ la q.e reducida á una comun expresion es $\frac{ab^3+3aub^2+3au^2b}{b^3}$ $=a\left(\frac{b^3+3ub^2+3u^2b+u^3}{b^3}\right)$ $=a\left(\frac{u+b}{b}\right)^3$, y es lo q.e ha de haver sacado el Comerciante al cabo de los 3 a.s

Segun la condicion del Problema esta cantidad junta con la que debia sacar al fin del primer año = expresada p.r $a+\frac{au}{b}$ es ig.l á $a\left(\frac{u+b}{b}\right)^3+a+\frac{au}{b}$ =

$$a\left(\frac{u+b}{b}\right)^3 + \frac{ab+au}{b} = a\left(\frac{u+b}{b}\right)^3$$

$$+\,a\left(\frac{u+b}{b}\right)$$

Esta expresion componela cantidad $\mathcal{L}.2.6700879$; q. representa porc, y esta condicion me dà la equacion

$a\left(\frac{u+b}{b}\right)^3 + a\left(\frac{u+b}{b}\right) = c$ laque es menestar resolber.

Para esto hagase $u+b = x$, y partiendo por a la equacion $a\left(\frac{u+b}{b}\right)^3 + a\left(\frac{u+b}{b}\right) = c$ resulta $\left(\frac{u+b}{b}\right)^3 + \left(\frac{u+b}{b}\right) = \frac{c}{a}$; laque multiplicada por b^3 dà......

$\overline{u+b}^3 + b^3\left(\frac{u+b}{b}\right) = \frac{b^3c}{a}$ # cuyo calculo simplificado mas es

$(u+b)^3 + b^2(u+b) = \frac{b^3c}{a}$ y substituyendo x por $u+b$ viene

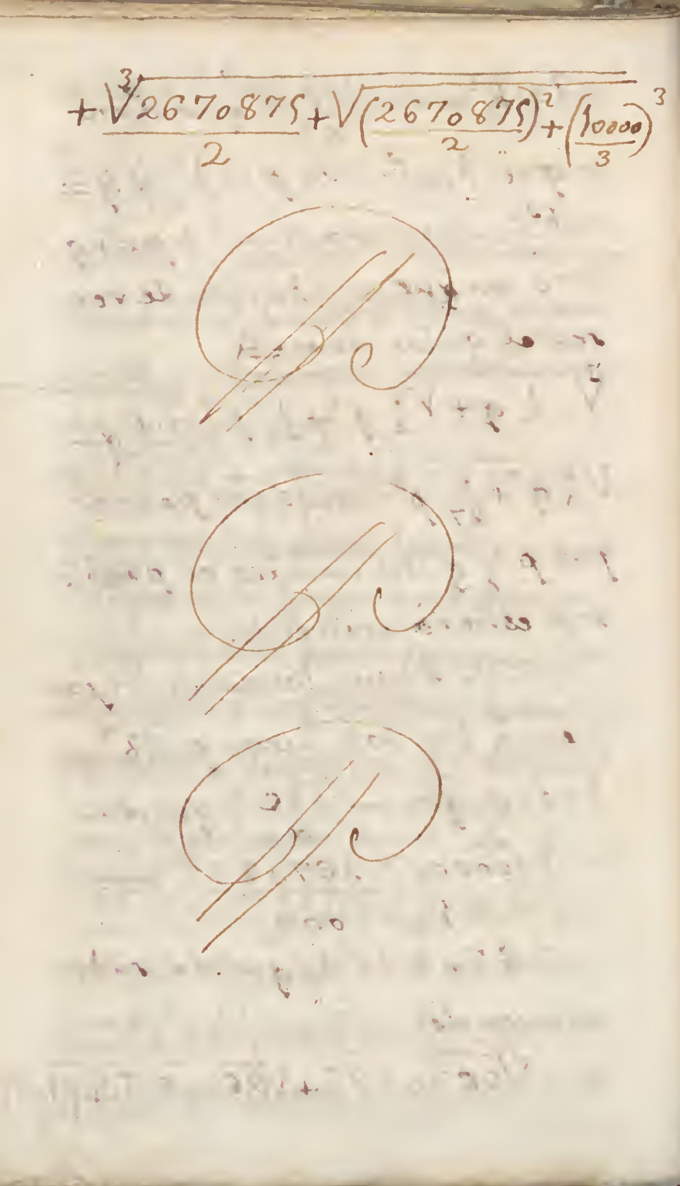
$x^3 + b^2x = \frac{b^3c}{a}$ Equacion en que haciendo $p = b^2$; y $q = -\frac{b^3c}{a}$ se muda en $x^3 + px + q = 0$ en que acabamos de ver ser el valor de $x =$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ luego con poner por p y q sus valores el problema estarà resuelto.

Segun los datos del problema $b = 100$ luego $p = b^2 = 10000$, $q = -\frac{b^3c}{a}$ lo que da $-\frac{1000000 \times 2670875}{1000000} = -2670875$ lo que da substituyendo - - - - - - - - - - - - - - -

$x = \sqrt[3]{\frac{2670875}{2} + \sqrt{\left(\frac{2670875}{2}\right)^2 + \left(\frac{100}{3}\right)^3}}$

$$+\sqrt[3]{\frac{2670875}{2}+\sqrt{\left(\frac{2670875}{2}\right)^2+\left(\frac{10000}{3}\right)^3}}$$



$$=\sqrt[3]{\frac{2670875}{2}+\sqrt{\frac{7133573265625}{4}+\frac{1000000000000}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{2670875}{2}-\sqrt{\frac{7133573265625}{4}+\frac{1000000000000}{27}}}$$

Multiplicando el numerador del del term.º 1.º del radical quadrado por 81, y el del 2.º por 12, y haciendo lo mismo respectivam.te con los denominadores para tener ambos quebrados con un mismo denominador q.e sea num.º quebrado, y viene........

$$x=\sqrt[3]{\frac{2670875}{2}+\sqrt{\frac{577819414515625+12000000000000}{324}}}+\sqrt[3]{\frac{2670875}{2}-\sqrt{\frac{577819414515625+12000000000000}{324}}}$$

Y reduciendo los terminos del radical quadrado resultarà $\sqrt[3]{\frac{2670875}{2}+\sqrt{\frac{589819414515625}{324}}}$ $+\sqrt[3]{\frac{2670875}{2}-\sqrt{\frac{589819414515625}{324}}}$, y resolviendo los radicales quadrados resulta $x=\sqrt[3]{\frac{2670875}{2}+\frac{24286194,025}{18}}$ $+\sqrt[3]{\frac{2670875}{2}-\frac{24286194,025}{18}}$ y multiplicando los terminos d'las prim.s fraccion.s por 108 y los de las seg.s por 12 para q.e tengan un denominador comun q.e sea Cubo perfecto, y reduciendo los terminos resulta $x=\sqrt[3]{\frac{379888876,300}{216}}$ $-\sqrt[3]{\frac{2979876,300}{216}}=\frac{833,4-143,9}{6}=115$

Hallado este primer valor de x se reduce à numeros la equacion del tercer grado $x^3+px+q=0$ substituyendo por p y q sus valores 10000 y -2670875 y viene la equacion............

$x^3+10000x-2670875=0$

la q.e reparte por la equacion $x=115$ que reducida à cero es $x-115=0$; El cociente cabal es $x^2+115x+23225=0$ equacion del segundo grado cuyas dos raizes siendo imaginarias dan à conocer q.e el problema no tiene mas de una resolucion.

Hallado pues este unico valor de $x=115$ para conseguir el de u, q.e es el vuscado tomo la equacion $u+b=x$; que transponiendo da

$u=x-b$; y poniendo por x, y b sus valores resultará la equacion $u=115-100=15$ por consig.te la ganancia, q.e hizo el Comerciante fue de 15 por 100 al año, y es lo q.e se preguntaba.

Nota.

La division exacta de la equacion $x^3+10000x-2670875$ por $x-115$ sin embargo de no haverse dado el calculo el num.o 115 cabal indica q.e la equacion del tercer grado del problema propuesto tiene una raiz commensurable; breve veremos un methodo g.ral para sacar de las equaciones estas especies de raizes.

Aqui se ofrece una dificultad

q.e es nesesario resolver, y es: en la equacion gral se hà escrito $x^3+px+q=0$, en q.e p y q estan positivos, lo q.e no quita, q.e puedan ser negativos, quando esto sucede, y q.e $\frac{1}{27}p^3$ es mayor q.e $\frac{1}{4}q^2$ entonces la expresion del valor de

$$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}$$

por contener el radical imaginario $\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}$ parese ser tambien imaginario, lo q.e seria una equivocacion el creerlo asi; pues es al contrario, porq.e siempre q.e p siendo negativo $\frac{1}{27}p^3$ es mayor q.e $\frac{1}{4}q^2$ las tres raizes dla equacion del tercer grado son verdaderas, en los demas casos no ai mas

de una raiz verdadera; y las otras dos son imaginarias.

Para demonstrarlo sea $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2} = b$ luego $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} = b\sqrt{-1}$; sea $\frac{1}{2}q = a$: substituyendo el valor de x se mudará en $x = \sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-a - b\sqrt{-1}}$, ó lo que es lo mismo $x = \sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}}$. Esto supuesto y reduciendo á series los dos terminos del valor de x por medio de la formula geral del binomio viene

$1^o \ldots\ldots (a+b)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{b}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}+\frac{5b^3}{81a^3}-\frac{10b^4}{243a^4}+\frac{22b^5}{729a^5}-\ldots\ldots\text{\&c.}\right)$

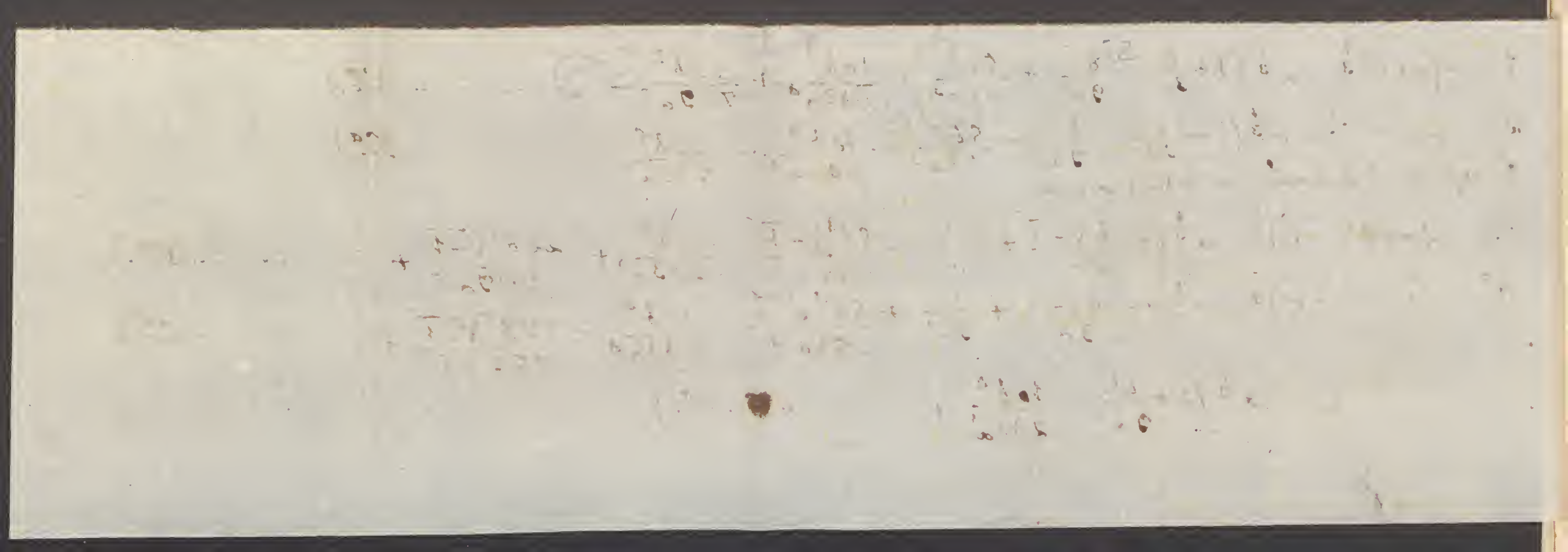
$2^o \ldots\ldots (-a+b)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{b}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}-\frac{5b^3}{81a^3}-\frac{10b^4}{243a^4}-\frac{22b^5}{729a^5}-\ldots\ldots\text{\&c.}\right)$

Despues de b haciendo $b\sqrt{-1}$ viene

$3^o \ldots\ldots (a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{b\sqrt{-1}}{3a}+\frac{b^2}{9a^2}-\frac{5b^3\sqrt{-1}}{81a^3}-\frac{10b^4}{243a^4}+\frac{22b^5\sqrt{-1}}{729a^5}+\ldots\ldots\text{\&c.}\right)$

$4^o \ldots\ldots (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{b\sqrt{-1}}{3a}+\frac{b^2}{9a^2}+\frac{5b^3\sqrt{-1}}{81a^3}-\frac{10b^4}{243a^4}-\frac{22b^5\sqrt{-1}}{729a^5}+\ldots\ldots\text{\&c.}\right)$

$2a^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{b^2}{9a^2}-\frac{10b^4}{243a^4}+\ldots\ldots\text{\&c.}\right)$



De esta formula se sigue que......

$$x=\sqrt{-a+b\sqrt{-1}}-\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=$$

$$2a^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{b^2}{3^2 a^2}-\frac{5.2.b^4}{3.3^4 a^4}+\frac{2.11.7.b^6}{3.3.3^6 a^6}\text{...\&c}\right)$$

equacion, que las raizes imaginarias se han desvanecido, y se puede continuar hasta donde se quiera segun la exactitud que se necesite. Substituidos pues en esta formula por a y b sus valores en numeros un primer valor de x; despues partiendo la equacion propuesta por x menos este valor, resultarà una equacion de segundo grado, cuyas raizes seran las otras dos buscadas.

Todo radical imaginario puede reducirse à esta forma $B\sqrt{-1}$

Sea el radical imaginario $\sqrt[m]{-b}$ siendo m, b, y B cantidades real.

Demon.

$\sqrt[1m]{-b}=b^{\frac{1}{1m}}\sqrt[1m]{-1}$ luego toda la expresion consiste en saber qual hà de ser el valor de B para que $b^{\frac{1}{1m}}\sqrt[1m]{-1}$ sea igual à $B\sqrt{-1}$ para hallar este valor tomo los logarithmos de la equacion $b^{\frac{1}{1m}}\sqrt[1m]{-1}=B\sqrt{-1}$ y se tendrà $L.b^{\frac{1}{1m}}+L.\sqrt[1m]{-1}=L.B+L.\sqrt{-1}$ en que $L.b^{\frac{1}{1m}}$ y $L.B$ son cantidades reales y $L.\sqrt[1m]{-1}$ y $L.\sqrt{-1}$ son immaginarias pero si los dos miembros de la equacion son iguales es presiso que lo sean entre si las partes reales, como tambien las imaginarias, luego tenemos $L.b^{\frac{1}{1m}}=L.B$; y $L.\sqrt[1m]{-1}=L.\sqrt{-1}$ por consiguiente $b^{\frac{1}{1m}}=B$ y $\sqrt[1m]{-1}=\sqrt{-1}$ luego deve $\sqrt[1m]{-b}=b^{\frac{1}{1m}}\sqrt[1m]{-1}=B\sqrt{-1}$.

Resolucion d.las equacio-nes d.l 4.º grado.

247... Sea la equacion gral d.l 4.º grado $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$ en q.e a, b, c, d son cantidades conocidas, y pueden ser positivas, ó negativas, hago como en la equacion d.l 3.º grado $z+\frac{1}{4}a=x$ y despejando la z será $z=x-\frac{1}{4}a$ substituyendo el valor d.l z en la equacion gral $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$ viene

$$z^4 = x^4 - ax^3 + \frac{3a^2x^2}{8} - \frac{a^3x}{16} + \frac{a^4}{256}$$
$$az^3 = \ldots + ax^3 - \frac{3a^2x^2}{4} + \frac{3a^3x}{16} - \frac{a^4}{64}$$
$$bz^2 = \ldots\ldots + bx^2 - \frac{abx}{2} + \frac{a^2b}{16}$$
$$cz = \ldots\ldots\ldots\ldots + cx - \frac{ac}{4}$$
$$d = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d$$

Sumando estas equaciones viene $z^4+az^3+bz^2+cz+d=x^4+\left(b-\frac{3}{8}a^2\right)x^2+\left(c-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}a^3\right)x$.

$+\frac{1}{16}a^2b-\frac{1}{4}ac-\frac{3}{256}a^4$ equacion del 4.º grado, q.e carece del segundo termino, y haciendo sus coeficientes $b-\frac{3}{8}a^2=p$

$c-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}a^3=q$;

$\frac{1}{16}a^2b-\frac{1}{4}ac-\frac{3}{256}a^4=r$

se reduce dha equacion á

$x^4+px^2+qx+r=0$

Toda equacion del quarto grado puede descomponerse en dos del segundo grado, y si se quiere q.e la del quarto caresca del 2.º termino se pondrá en el 2.º termino un mismo coeficiente con signos contrarios, y quedará la equacion $x^4+px^2+qx+r=0$ descompuesta en las dos siguientes.

$x^2+yx+n=0$ } Que multipli-
$x^2-yx+m=0$ }
cadas dan $x^4+yx^3+nx^2$

$$-yx^3 - yx^2 - ynx$$
$$+mx^2 + ymx + mn$$

$$x^4 + (m+n-y^2)x^2 + (ym-yn)x + mn$$

equacion q.e comparada con la equacion $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ resulta $p = m+n-y^2$

$$q = y(m-n)$$

$$r = mn$$

Sumando las dos equaciones $p = m+n-y^2$, y $q = y(m-n)$ viene $2m = y^2 + p + \frac{q}{y}$ y despejando viene $m = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ y restando las mismas equaciones para hallar el valor de n viene

$2n = y^2 + p - \frac{q}{y}$ luego es

$$n = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}.$$

substituyendo los valores de m, y n en la equacion $r = mn$ multiplicando uno por otro estos valores resulta . . . .

$x=\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{2}py^2+\frac{1}{4}p^2-\frac{q^2}{4y^2}$
multiplicando todo por $4y^2$ viene
$4xy^2=y^6+2py^4+p^2y^2-q^2$
y transponiendo viene
$$y^6+2py^4+p^2y^2-q^2=0$$
$$-4xy^2$$
ó $y^6+2py^4+(p^2-4x)y^2-q^2=0$
Si se hace $y^2=u$ y se substituye
en la equacion anterior resulta $u^3+2pu^2+(p^2-4x)u-q^2=0$
equacion del tercer grado en
la qual se encontrarán los valores de u por el methodo de
las equaciones del tercer grado
q.e se acaban de explicar despues
la raiz quadrada de este valor
de u será el de y, el q.e substituido en las equaciones $m=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}$ y $n=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}$
dará los valores de m, y n; finalm.te con los tres valores de

y, m, n substituidos en las equaciones del seg.do grado $x^2+yx+n=0$, y $x^2-yx+m=0$ se conseguirán los valores de x buscados.

La equación $u^3+2pu^2+(p^2-4r)u-q^2=0$ se llama reducida, y es de advertir

1º..... Quando la equación reducida no tiene mas de una raiz verdadera, y es positiva la equación del quarto grado tiene dos raizes verdaderas, y dos imaginarias.

2º..... Si las tres raizes de la equación reducida son verdaderas, y positivas, ó lo menos lo fueron dos, la equación del quarto grado tiene sus quatro raizes verdaderas.

3º..... En qualquiera otro caso las quatro raizes del quarto grado son imaginarias.

De la naturaleza, y propiedades generales de las equaciones de diferentes grad.^s

228.....Para establecer reglas para el calculo de las equaciones de todos los grados se tendrà presente el parrafo   a que añadirèmos lo siguiente solo mudando la voz factores en la de raizes.

1.°....Se han de poner todos los miembros de una equacion en un miembro siendo el otro ig.^l cero; como se ha hecho en las equaciones del tercero, y quarto grado v.g. $x^5-ax^4+bx^3-cx^2+dx=ef$, y serà $x^5-ax^4+bx^3-cx^2+dx-ef=0$

2.°.....Se escriben los terminos del primer miembro segun el orden

progressivo descendente de los exponentes de la incognita cuya operacion se llama ordenar la equacion v.g. $2x^2+x^4-7x-5x^3-258=0$ se debe escribir $x^4-5x^3+2x^2-7x-258=0$

Definiciones.

1.ª ... Equacion completa es aquella, q.e no falta termino alguno esto es q.e el orden de los exponentes de la incognita sigue la progression descendente de los numeros naturales sin interrupcion, y q.e jamas ha de tener un termino compuesto de cantidades todas conocidas. como las equaciones antecedentes.

De lo dho se sigue, que el numero de los terminos de una equacion completa es ig.l al numero de unidades del mayor exponente de la incognita mas uno, es decir que una equacion del tercer grado

tendrá quatro terminos, una de quarto, cinco &c.

2ª... Equacion incompleta es aquella, en que falta algun termino, ó que hai interrupcion en la progresion decendente de los exponentes de la incognita v. g. $x^5 - 3x^3 + 3x^2 - b = 0$ es una equacion incompleta en que faltan el segundo, y quinto termino.

289. Los terminos de una equacion toman su nombre del sitio que ocupan, como la equacion este completa, y ordenada del mismo modo, que en los productos de los factores de las cantidades así el termino en que la incognita está elevada á la mayor potencia se llama primer termino de la equacion es aquel en que el exponente de la incognita es de una unidad menor que en el primero tercero termino es aquel

en q.e el exponente dla incog-
nita; es menor d dos unidades,
q.e en el primero .... &c.a

Ultimo termino es aquel q.e so-
lo contiene cantidades conocidas.

Suposiciones.

250.... 1.a.... Supondremos en ade-
lante q.e el primer termino d
una equacion compuesta no es
multiplicado por cantidad co-
nocida alguna, ó q.e si lo era
se le ha despejado p.r la division.

2.a.... Que una equacion es un
compuesto d tantas equaciones
del primer grado quantas u-
nidades contiene el mayor ex-
ponente dla incognita, así co-
mo la composicion dlas can-
tidades algebricas en que he-
mos multiplicado $(a+b) \times (a+c)$
$\times (a+d)$ .... &c.a para entrar en co-
nocim.to dlas varias potencias, y

la naturaleza de sus Productos haciendo b, c, d, ... &c. ig.^{s} á, b; del mismo modo poniendo x por a en los factores a + b; a + c; a + d .... &c. y suponiendo x + a = 0; x + b = 0; x + c = 0; variando despues los signos de las segundas partes a, b, c; .... &c. en todos los modos posibles, y multiplicando unas por otras todas estas equaciones del primer grado para formar otras tantas equaciones del 2.º 3.º 4.º grado &c. la comparacion unas con otras de todas estas equaciones deben dar á conocer sus propiedades. V.G. todas las variaciones de signos, q.^{e} son posibles para tres valores de una incognita son

1.ª.... Que estos valores seran positivos.

2º..... Que todos sean negativos.

3º..... Que dos sean positivos, y uno negativo.

4º..... Que dos sean negativos, y uno positivo.

Para todas las equaciones del tercer grado se pueden establecer las formulas siguientes

1ª....

$$x = a$$
$$x = b$$
$$x = c.$$

Reduciendo estas equaciones á cero son .... $\begin{cases} x-a=0 \\ x-b=0 \\ x-c=0 \end{cases}$

$$x-a=0$$
$$x-b=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-ax+ab \\ \quad -bx \end{array}\right\} = 0 \times (x-c=0)$$

$$A \left\{\begin{array}{l} x^3-ax^2+abx-abc \\ \quad -bx^2+acx \\ \quad -cx^2+bcx \end{array}\right\} = 0$$

2ª $\left.\begin{array}{l} x=-a \\ x=-b \\ x=-c \end{array}\right\} = \begin{cases} x+a=0 \\ x+b=0 \\ x+c=0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} &x + a = 0 \\ &x + b = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &x^2 + ax + ab \\ &\quad + bx \end{aligned}\right\} = 0 \times (x + c = 0)$$

$$B \quad \left.\begin{aligned} &x^3 + ax^2 + abx + abc \\ &\quad + bx^2 + acx \\ &\quad + cx \;\; + bcx \end{aligned}\right\} = 0$$

$$3.^a \quad \left.\begin{aligned} x &= a \\ x &= b \\ x &= -c \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} x - a &= 0 \\ x - b &= 0 \\ x + c &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} &x - a = 0 \\ &x - b = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &x^2 - ax + ab \\ &\quad - bx \end{aligned}\right\} = 0 \times (x + c = 0$$

$$C \quad \left.\begin{aligned} &x^3 - ax^2 + abx + abc \\ &\quad - bx^2 - acx \\ &\quad + cx^2 - bcx \end{aligned}\right\} = 0$$

$$4.^a \quad \left.\begin{aligned} x &= -a \\ x &= -b \\ x &= c \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} x + a &= 0 \\ x + b &= 0 \\ x - c &= 0 \end{aligned}\right.$$

$x + a = 0$

$x + b = 0$

$$\left.\begin{matrix} x^2 + ax + ab \\ + bx \end{matrix}\right\} = 0 \times (x - c = 0)$$

$$\left.\begin{matrix} x^3 + ax^2 + abx - abc \\ + bx^2 - acx \\ - cx^2 - bcx \end{matrix}\right\} = 0$$

Si los valores son quatro las mutaciones posibles de signos son

1.ª ... todas positivas

2.ª ... todas negativas

3.ª ... tres positivas, y una negativa.

4.ª ... Dos positivas, y dos negativas.

5.ª ... Tres negativas, y una positiva.

De estas mutaciones solo se pondra la formula de la 4.ª por ser util para la explicacion de los theoremas siguientes

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ x = b \\ x = -c \\ x = -d \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ x + c = 0 \\ x + d = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & - ax^3 & + ab.x^2 & + abcx & + abcd \\ & - bx^3 & - ac. & + abd & \\ & + cx^3 & - ad. & - acd & \\ & + dx^3 & - bc. & - bcd & \\ & & - bd. & & \\ & & + cd. & & \end{array}$$

Supongase, q.^e se hayan formado otras semejantes formulas del 4.º y 5.º grado &c.^a examinandolas se hallara que las propriedades siguientes son una consequencia necessaria necessaria de la construccion de las equaciones formadas del producto de diferentes valores reales, y no imaginarios de una misma incognita.

Theorema 1º.

251.... Toda equacion es de un grado expresado por el numero de los valores de la incognita.

Demon.

Toda equacion puramte. algebraica puede tomarse por una formula gral, q.e encierra una propiedad gral de la magnitud, luego se puede decir, q.e una equacion tiene tantas raizes quantas unidades hai en el mayor exponente de la incognita, como qualquiera de las equaciones A, B, C, &c.

Theorema 2º.

252.... La suma de todas las raizes de una equacion forma el coeficiente del segundo termino: La suma de sus productos multiplicadas de dos en dos forma el coeficiente del termino

3.º La suma de sus productos multiplicados de 3 en 3 forma el coeficiente del termino 4.º &c.ª y el producto de todas estas raizes forma el ultimo termino de la equacion, como se ve en la equacion C.

9. Corolario.

El coeficiente de un termino qualquiera de una equacion es ig.l a la suma de los productos de las raizes tomadas de tantas en tantas, quantas unidades tiene el numero, q.e expresare el termino buscado disminuido de una unidad. v. g. el 9.º termino sera la suma de los productos de las raizes tomadas de 8 en 8.

Theorema 3.º

253. Todas las raizes de una equacion son positivas quando

los signos de sus terminos son
alternativamente + y −
Quando los terminos de una
equacion son todos positivos
todas las raizes son negativas.
Generalmente havra tantas rai-
zes positivas, quantas mutacio-
nes de signos de un termino á o-
tro, y tantas negativas quan-
tos signos constantes pertene-
cientes á dos terminos contiguos.
De la 1.ª especie es la equaci-
on A de la 2.ª la equacion B,
y de la 3.ª la equacion C.

Theorema 4

254... Quando la suma de las
raizes positivas de una equa-
cion es igual á la suma de las rai-
zes negativas, la equacion debe
carecer del 2.º termino, como en
la equacion C.

Quando la suma d̃los produc-
tos positivos d̃las raizes mul-
tiplicadas d̃dos endos es igual â
la suma d̃los productos nega-
tivos d̃estas mismas raizes
tomadas d̃l mismo modo; la
equacion debe carecer d̃terc-
cer termino, y generalmente si
faltare algun termino en u-
na equacion es señal, q. sus
raizes no tienen un mismo
termino.

Theorema 5.°

255... Si el 2.° termino d̃una
equacion es negativo la suma
d̃las raizes positivas exede
â la suma d̃las raizes negati-
vas; como la equacion C.

Si el 2.° termino es positi-
vo la suma d̃las raizes nega-
tivas exede â la suma d̃las ra-
izes positivas como en la equa-

cion D.

Theorema 6.

256... Quando el ultimo termino de una equacion es positivo el numero de las raizes positivas es par; (como en la equacion C.) pero si es negativo es impar, como en la equacion D.

Theorema 7.

257... Toda equacion, q.e carece de ultimo termino es de un grado inferior al señalado por el mayor exponente de la incognita como la equacion - - - - - -

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx=0,$$

q.e se reduce à - - - - - - - - -

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

Theorema 8

258... Si à la incognita en una equacion se le substituye uno de sus valores toda la equacion se

reduce á cero.

Demon.

Sien la equacion
$$x^3 - a \cdot x^2 + ab \cdot x - abc \left.\begin{matrix} \\ -b \quad + ac \\ -c \quad + bc \end{matrix}\right\} = 0$$
producto de $\overline{x-a} \times \overline{x-b} \times \overline{x-c}$ se pone en lugar de x uno de sus valores a, b, c, es evidente que esta equacion (substituyendo a. v. g.) será el producto de $\overline{x-b} \times \overline{x-c} \times \overline{a-a}$ pero $a-a=0$ luego todo el producto se reducirá á cero.

Theorema 9.

259. La incognita equivale indistintam.te á cada una de las raizes de la equacion, esto es, q. en la equacion antecedente x es indistintam.te igual á $a, b. c$.

Demon.

Para comprehender como x.

puede ser â un tiempo igual â diferentes cantidades se observarà, q.e siendo x una letra sin valor intrinseco puede representar lo q.e se quiera, luego si se quiere q.e x represente la cantidad, q.e satisfaga las condiciones de un Problema; si son varias las cantidades, q.e pueden igualm.te satisfacer estas condiciones es evidente, q.e la x en tal caso las representarà â todas; pero si x representare una magnitud determinada, no puede tener mas de un va...

Corolario

De lo dho se infiere, q.e si en una equacion substituyendo un valor en lugar de la incognita se reduce toda la equacion â cero este valor serà el verdadero de la incognita.

Theorema 10.

260 ... Si en una equacion se mudan todos los terminos, en q.^e la incognita tiene un exponente impar; los valores d. la incognita mudaràn tambien d. signo en la resolucion d. esta equacion, esto es: q.^e las raizes positivas seràn negativas, y las negativas positivas.

De las equaciones, y raizes imaginarias.

261 ... Es evidente, q.^e las dos raizes quadradas d. $-a$ son $+\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$ cuyo producto es ... $+\sqrt{a}\times-\sqrt{a}=1\times-1\times a=-a$ Del mismo modo q.^e las dos raizes d. a son $\sqrt{a}$ y $\sqrt{a}$ ó $-\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$. pues $+\sqrt{a}\times+\sqrt{a}=1.1.a=a$ y $-\sqrt{a}\times-\sqrt{a}=-1.-1.a=a$ por la misma razon $-a$ debe tener

las dos raizes imaginarias

$\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$ es el producto $1.-1.\sqrt{-a}.\sqrt{-a} = -1.-a = a$ pues el producto de los signos, q. e anteceden á los radicales es $-$ y el de los radicales $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ es tambien $-$ luego el producto total será $+$

El producto de $\sqrt{-a}.\sqrt{-a}$ ó el de $-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a}$ será $-a$ por la misma razon porque

$\sqrt{-a}.\sqrt{-a} = 1.1.\sqrt{-a}.\sqrt{a} = 1.-a = -a$ tambien $-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a} = -1.-1.\sqrt{-a}.\sqrt{-a} = 1.-a = -a$

De donde se ve, que generalm.te el producto de dos cantidades imaginarias puede representarse baxo la forma de una cantidad real, y por consig.te q.e una equacion cuyos terminos son todos reales puede contener raizes imaginarias.

Aquí se habla solamte. de las cantidades imaginarias expli cadas solamte. por raizes quadradas de cantidades negativa por ser las unicas, q. se usan en las equaciones de todos los grados, pero en la multiplicacion de estas cantidades el signo radical solo puede desvanecerse en el caso de multiplicarse de dos en dos aquellos que tienen la misma cantidad debaxo del signo radical v.g.

$\pm\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=-a$

$-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a}=a\sqrt{-a}$

$-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a}=a^2$

$-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a}.-\sqrt{-a}=-a^2\sqrt{-a}$

Luego una cantidad real no puede representar el producto de cantidades imaginarias si cada especie de estas raizes no se hallan multiplicadas en numero par.

Theorema fundam.l

262... Si uno de los terminos de un polinomio es un radical imaginario, no se podrá este desvanecer sino se multiplica este polinomio por si mismo con la unica diferencia de mudar el signo, q.e antecede a dho radical.

Sea el polinomio $x-a-b\sqrt{-1}$ el signo radical puede desvanecerse multiplicando dho polinomio por este otro $x-a+b\sqrt{-1}$ el producto será $x^2-2ax+a^2+b^2$

$$\begin{array}{l} x-a-b\sqrt{-1} \\ x-a+b\sqrt{-1} \\ \hline x^2-ax-xb\sqrt{-1} \\ \quad -ax+a^2 \ldots\ldots +ab\sqrt{-1} \\ \qquad +xb\sqrt{-1}-ab\sqrt{-1}+b^2 \\ \hline x^2-2ax+a^2+b^2 \end{array}$$

El producto de $x-a\times x-a$ $=x^2-2ax+a^2$

Los productos de $x-a\times-b\sqrt{-1}$ y $x-a\times b\sqrt{-1}$ se desvanecen, y el producto de $b\sqrt{-1}\times-b\sqrt{-1}=b^2$.

De todas estas demonstraciones se siguen los Theoremas siguientes.

Theorema 1º.

263. Las equaciones cuyos terminos son todos reales si tienen raizes imaginarias estan en numero par.

Theorema 2º.

264. Las raizes imaginarias que se hallan en la resolucion de una equacion tienen de dos en dos la misma cantidad debaxo del radical diferenciado solamente en el signo + y − que antecede a uno, y otro radical.

Theorema 3º.

265.... Toda equacion de un grado impar tiene a lo menos

una raiz verdadera.

Theorema 4.º

266. Toda equacion ordenada de un grado par, si su ultimo termino es negativo tiene lo menos dos raizes reales, una positiva, y otra negativa.

La razon es que el producto real de dos radicales imaginarios q.e son parte de dos polinomios multiplicados uno por otro es necessariam.te positivo.

Reduciones, y transformaciones de las Raizes.

267. Toda equacion puede transformarse en otra en q.e la incognita de la primera haya padecido qualquier transmutacion conocida: esto es que haya sido aumentada, ó disminuida de una cantidad dada f, q.e sea de la in-

cognita de la nueva equacion en la relacion de f á g siendo la cantidad representada por f conocida, y determinada; ó incognita, é indeterminada.

Para esto si x es la incognita de la equacion propuesta basta con hacer

$x = y + f$
$x = y - f$
$x = \frac{f}{y}$
$x = \frac{y}{f}$
$x = \frac{fy}{g}$

y substituyen sus valores en lugar de x

v. g. si en la equacion

$x^3 - px^2 + qx + r = 0$ se substituye $y + f$ en lugar de x se tendra - - - - - - - - - -

$x^3 = y^3 + 3y^2f + 3yf^2 + f^3$
$-px^2 = - py^2 - 2pfy - pf^2$
$qx = \ldots\ldots + qy + qf$
$-r = - - - - - - - - - - r$

$y^3+(3f-p)y^2+(3f^2-2pf+q)y$
$+f^3-pf^2+qf-x=0$

equacion en que los valores de y son menores, que los de x de toda la cantidad representada por f sea ô no determinada.

si $x=y-f$, la equacion .... $x^3-px^2+qx-x=0$ se mudara en

$x^3 = y^3-3y^2f+3yf^2-f^3$
$-px^2 = \quad -py^2+2pfy-pf^2$
$qx = \ldots\ldots\ldots+qy-qf$
$-x = \ldots\ldots\ldots\ldots-x$

$y^3-(3f-p)y^2+(3f^2+2pf+q)y$
$-f^3-pf^2-qf-x=0$ equacion en que los valores de y son mayores que los de x de toda la cantidad representada por f.

si $x=f y$ la equacion x^3-px^2
$+qx-x=0$ se mudara en

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= f^3y^3 \\ -px^2 &= pf^2y^2 \\ qx &= qfy \\ -x &= -x \end{aligned}\right\} = f^3y^3 - pf^2y^2 + qfy - x = 0$$

equación en q.^{e} $y : x :: 1 : f$

Si $x = \frac{y}{f}$ se tendrá ....

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= \frac{y^3}{f^3} \\ -px &= -\frac{py}{f^2} \\ qx &= \frac{qy}{f} \\ -x &= -x \end{aligned}\right\} = \frac{y^3}{f^3} - \frac{py^2}{f^2} + \frac{qy}{f} - x = 0$$

equación en que $y : x :: f : 1$

Si $x = \frac{fy}{g}$ se tendrá ....

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= \frac{f^3y^3}{g^3} \\ -px^2 &= -\frac{pf^2y^2}{g^2} \\ qx &= \frac{qfy}{g} \\ -x &= -x \end{aligned}\right\} = \frac{f^3y^3}{g^3} - \frac{pf^2y^2}{g^2} + \frac{qfy}{g} - x = ...$$

$$.... \frac{f^3y^3 - pf^2gy^2 + qfg^2y - xg^3}{g^3} = 0$$

Equacion en q.e $\frac{x}{f} : y :: \frac{1}{f} : \frac{3}{f}$

ó $y : \frac{x}{f} :: \frac{3}{f} : \frac{1}{f}$

268 De todo lo dho se ve, q.e si como se hà practicado en la resolucion de las equaciones del 3.o y 4.o grado en la 1.a de estas subtituciones se hace $f = \frac{4}{3}p$ el 2.o termino $(3f - p)y^2$ de la nueba equacion se desvanecerà pues en este caso $3f - p = p - p = 0$

Aplicando esta regla à las formulas gles, q.e representan todas las equaciones se tendra este principio general.

Para quitar el 2.o termino de una equacion qualquiera se transformarà esta en otra subtituyendo en lugar de la incognita de la 1.a otra incognita menos el coeficiente del 2.o term.o

partido por el exponente de la incognita en el 1.º v.g. para quitar el 2.º term.º de la equacion $x^5 + 10x^4 - 6x^3 + x^2 + 30 = 0$ se debe poner en [illegible]a de x, $y + \frac{10}{5} = y + 2$ la transformada sera

$$y^5 + k - 46y^3 + 197y^2 - 260y + 144 = 0$$

Segun la misma observacion se pudiera hallar una transformada q.e careciera de 3.º, 4.º, 5.º termino pero la cantidad q.e se debe añadir á y no se hallaría sino resolviendo una equacion de 2.º 3.º 4.º &c.a grado. v.g en la 1.a de las equaciones pasadas [illegible] tas de 3.º termino ——— $(-f^2 - 2pf + q)$ y de la transformada si se quisiera quitar, siendo [illegible] añadir á y la cantidad f no se pudiera hallar

el valor de esta sino resolviendo una equacion del 2.º grado, luego para tomar el valor de f es menester resolver la equacion del 2.º grado $3f^2 - 2pf + q = 0$

De la Resolucion de las equaciones compuestas, ó methodo general para hallar en numeros el valor de la incognita.

269... La mayor dificultad que se encuentra en la resolucion de los problemas, que se reducen á equaciones, que pasan del 4.º grado consiste en extraer sus raizes, ya sean literales, ó numericos los coeficientes de la incognita.

Aunque este sea el princi-
pal objeto de la Algebra no
podemos extendernos mucho
en el asunto, porque las dife-
rentes indagaciones, que han
hecho los Mathematicos en
esta parte han producido u-
na Theorica mui compliada,
y un gran numero de metho-
dos mayormente para las e-
quaciones puramente Alge-
braicas.

El que quiera instruirse á
fondo en esta materia debe
consultar los diferentes tra-
tados Algebraicos, y princi-
palmente la Algebra de Eu-
lero, los Elementos de Mathe-

maticas de Dn. Carlos Lemaur,
y el tratado completo sobre to-
das las partes de las Mathe-
maticas de Dn. Benito Bails.
En estos elementos daremos
dos methodos para hallar en
numeros el valor, ó valores
de la incognita en las equa-
ciones de todos grados el
1.º servirá quando las raízes
son reales, y numeros enteros.
y el - - - - - - - - - - - -
2.º quando en las raízes rea-
les son numeros enteros, y que-
brados commensurables, ó incom-
mensurables.

Methodo 1.º

1.º Busquense todos los Divisores del ultimo termino de la equacion, si las raizes de la equacion son numeros enteros deben hallarse entre estos divisores, subtituyanse sucesivam.te estos divisores en lugar de la incognita; y el Divisor, q.e assi subtituido redujere la equacion â cero serà uno de los valores de la incognita.

2.º Partase la equacion propuesta por la equacion, q.e da la raiz hallada reducido un miembro â cero el quociente

deve ser cabal, y la equacion baxada de un grado.

3.º Tomense del mismo modo los divisores del ultimo termino de esta nueva equacion, y substituyanse como antes, hasta reducir la equacion à cero.

4.º Se partirà la equacion otra ves à la equacion, que dà la incognita, y serà otro valor de ella, y la equacion baxarà de otro grado, y asi susesivamente, hasta que el quociente sea una equacion del 2.º grado, la que resuelta darà dos valores de la incognita, y cada substitucion que se ha hecho, y reducido la equacion à cero serà otro valor de la incognita.

Sea propuesta la equacion
$x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 24x + 36 = 0$
hallense los divisores del ultimo termino 36, que seran.

36, − 36,,	6, − 6,,
18, − 18,,	4,, − 4,,
12, − 12,,	3, − 3,,
9, − 9,,	2, − 2,,
1, − 1,,	

Substituyase subsesivamte. principiando por los menores.

Substituyendo 1 resulta....
$x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 24x + 36 =$
$1 - 8 + 15 - 24 + 36 = - 20$
Luego 1 no es ninguno de los valores de x.

Substituyendo 2 resulta. .
$x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 24x + 36 =$
$16 - 64 + 60 - 48 + 36 = 0$
Luego 2 es uno de los valores.

de x, luego $x=2$, y transponiendo $x-2=0$

Partase la equacion $x^4-8x^3+15x^2-24x+36=0$ por la equacion $x-2=0$, y sera el quociente $x^3-6x^2+3x-18=0$ equacion del tercer grado.

2.º... Hallense los divisores del ultimo termino 18, que seran
18„ 9„ 6„ 3„ 2„ 1
−18„ −9„ −6„ −3 −2„ −1

Subtituyase, como antes subsesivam.te 1 primero, y resultarà $x^3-6x^2+3x-18=1-6+3-18=-20$ luego 1 no es valor de x.

Subtituyase el 2, y resultarà $x^3-6x^2+3x-18=8-24+6-18=-28$ luego tampoco 2 es valor de x.

Substituyase el 3 y resultarà
$x^3-6x^2+3x-18=27-54+9$
$-18=-36$ luego 3 tampoco es
valor dela incognita.

Substituyase 6 y resultarà
$x^3-6x^2+3x-18=216-216$
$+18-18=0$ luego 6 es otro de
los valores de x.

Partase la equacion x^3-6x^2
$+3x-18=0$ à la equacion
$x-6=0$ y serà el quociente
$x^2+3=0$ equacion del 2º gra-
do, que resuelta dà $x=\pm\sqrt{-3}$
y seran los quatro valores de x
$2, 6, +\sqrt{-3}$ y $-\sqrt{-3}$

Si antes de llegar à equacion
del 2º grado salen los valores,
ò raizes incomensurables allì
cesa este methodo.

Este Methodo es presisamte

el inverso de las operaciones, q.
se han executado para formar
las diferentes potencias del
binomio, y la produccion de las
equaciones, tambien puede a-
plicarse a las equaciones pura-
m.te algebraicas, en que el valor
de la incognita es commensu-
rable esto es quando los divi-
sores algebraicos del ultimo ter-
min son el valor exacto de
la incognita.

270...... Methodo 2.º

Se substituye en lugar de la
propuesta subsesivam.te los
numeros 1, 2, 3, 4, 5, &c. en lu-
gar de la incognita hasta que
se vea que su sentido, [illegible]
se muda la equacion pasa del
positivo al negativo, ò del con-
trario, entonces el valor de la

incognita será un numero positivo mayor, que el penultimo, y menor que el ultimo de los numeros substituidos, luego se hace esta proporcion: la diferencia de los dos ultimos resultados es à la diferencia de las suposiciones, ò numeros substituidos, como qualquiera de los resultados es à la diferencia del à su suposicion, ò numero substituido, cuyo quarto termino proporcional se restarà de su suposicion si el resultado tomado es positivo, y se añadirà si es negativo, y de uno, ù otro modo se tiene uno de los valores de la incognita.

Sea la equacion propuesta

$$x^4+2x^3-36x^2+5x-116=0$$

Substituyanse sucesivamente 76
los numeros 1, 2, 3, 4, &c.

Supuestos. Result.

1 ... 001 + 002 − 036 + 005 − 116 = −144
2 ... 016 + 016 − 144 + 010 − 116 = −218
3 ... 081 + 054 − 324 + 015 − 116 = −290
4 ... 256 + 128 − 576 + 020 − 116 = −288
5 ... 625 + 250 − 900 + 025 − 116 = −116
6 ... 1296 + 432 − 1296 + 030 − 116 = +346

El ultimo supuesto, que hà dado el resultado negativo es 5 y el primero, que dà el positivo es 6 luego el valor de x està entre 5 y 6 para hallar este valor hago esta proporcion la diferencia de los dos resultados −116, y +346 esta à la diferencia de los numeros supuestos 5 y 6 como qualquiera de los resultados −116 ò +346 es à la diferencia de su supuesto 5 ò 6 al numero que se busca.

$346 - - 116 = 162 : 6 - 5 = 1$
$:: 346 : \frac{346}{162} = 0,75$ que restado
de 6 porque se tomó el resulta-
do positivo da $x = 5,25$.
Si se toma el resultado nega
tivo dará lo mismo añadien-
do al supuesto el 4.º termino
proporcional v.g.
$162 : 1 :: 116 : \frac{116}{162} = 0,25$
Luego tambien da $x = 5,25$.
Para aproximarse mas al
valor de x, se hace $x = 5,25 + d$
siendo d un quebrado mui peque
ño; substituyase dicha cantidad
en lugar de x en la equacion
propuesta despreciando los ter-
minos en que d pasa del qua-
drado, y resultan los valores de
x representados en la lamina

$x^4 = 759,6914 + 578,8125 . d + 165,375 . d^2$

$2x^3 = 289,4062 + 165,3751 . d + 331,5 \; d^2$

$-36x^2 = -992,25 - 378, \; d - 036, \; d^2$

$5x = 026,25 + 005, \; d$

$-116 = -116,$

$S = -32,9024 + 371,1876\, d + 160,875\, d^2 = 0$

Equación del 2.º grado queda

$$d = \frac{-371,1876 \pm \sqrt{32,9024 \times 4 . 160,875 + 371,1876^2}}{2 . 160,875}$$

$$d = -\frac{371,1876}{2.160,875} + \sqrt{\frac{32,9024}{2.160,875} + \left(\frac{371,1876}{2.160,875}\right)^2}$$

$$d = -1,1536 + \sqrt{0,20452152 + 1,33079296}$$

$$d = -1,1536 + \sqrt{1,53531448} = -1,1536 + 1,239 = 0,0854$$

$$x^4 = +810,344073 + 607,522644.d + 170,799558.d^2$$

$$2x^3 = +303,764322 + 170,799558.d + 032,0124.\ d^2$$

$$-36x^2 = -1024,797348 - 384,1488 \ldots d - 036, \ldots\ldots d^2$$

$$5x = +0026,677 \ldots\ldots + 005, \ldots\ldots d$$

$$-116 = -0116$$

$$S = -0,014953 + 399,322202\,d + 166,811958\,d^2 = 0$$

$$d = -\frac{399,322202 + \sqrt{0,014953 \times 4.166,811958 + \overline{399,322202}^2}}{2.166,811958}$$

$$d = -\frac{399,322202}{2.166,811958} + \sqrt{\frac{0,014953}{166,811958} + \left(\frac{399,322202}{2.166,811958}\right)^2}$$

$$d = -1,196923 + \sqrt{0,0000896398 55 + 1,432624667929}$$

$$d = -1,196923 + \sqrt{1,43271430 7784}$$

$$d = -1,196923 + 1,19696 = 0,00037$$

$$x = 5,3354 + d = 5,3354 + 0,00037 = 5,335437$$

presente, que sumados hacen
$-32,9024+371,1876\,d$
$+160,875\,d^2=0$ equación
del 2.º grado, que resuelta da
$d=0,0854$

Y siendo $x=5,25+d$ substi-
tuyendo en esta equación por
d su valor será $x=5,25+0,$
$0854=5,3354$

Este valor de x se puede tra-
er aun mucho mas exacto
volviendo á hacer la misma
operación, y suponiendo
$x=5,3354+d$ substituyendo
este valor en lugar de x en la
equación, despreciando los ter-
minos en que d pasa del 2.º gra
do por ser d un quebrado mui
pequeño, haciendo el resto ig.l a 0
y resolviendo la equación de

2º grado, que resulta de esta operación vendrá $d=0,000037$; y aviendose hecho $x=5,3354+d$ substituyendo por d su valor en esta equación resultarà $x=5,3354+0,000037=5,335437$.

Quando por este methodo se ha hallado una de las raizes se partirà la equación propuesta por la raiz hallada; esto es por $x\pm$ su raiz en este exemplo es por $x-5,335437$ para baxarla de un grado, y encontrar otra raiz por el mismo methodo; en este exemplo hecha la división se reduce la equacion propuesta à – – –

$x^3+7,335437x^2+3,138063x+21,742929=0$

Algunas veces haviendo re-
cho x igual â la raiz hallada
mas d no debe ser sino menos d
pero esto se conocerà facilmen
te enque si haviendose supu-
esto por x en primer lugar
1; 2; 3; 4; 5; &c. i dado estas su-
posiciones los resultados posi-
tivos hasta la substitucion
n.º 5 si en este caso despues de
substituido 4 y un quebrado
decimal hallado por una
previa operacion, y mas d
en lugar dela incognita x;
prosigue en ser negativa la
suma de los terminos, qui no
comprehenden la letra d,
dicha letra debe ser positiva,
y de lo contrario negativa, en
cuyo ultimo caso se mudarà

el signo del termino, que se halla multiplicado por d, dexando los otros dos terminos con sus propios signos, y se resolverà al ordinario la equacion del 2.º grado, que resulta; lo que darà el valor vuscado de d, el que añadido à la raiz hallada, ò quitado de ella segun sea nesesario, darà el valor mas aproximado de x.

271.... Por este mismo methodo se puede vuscar el valor de x siendo negativo; sustituyendo en su lugar los numeros −1; −2; −3; −4; −5; &.ª

Tambien con este methodo se pueden hallar hasta los

valores de la incognita, que no llegan á ser enteros, substituyendo en su lugar las decimales 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; &c.ª ó −0,1; −0,2; −0,3; −0,4; −0,5; &c.

Quando en una equacion hai raizes, que difieren entre si poco mas de la unidad la serie, que resulta de las substituciones de los numeros 1; 2; 3; 4; 5; &c. no suele mudar de signo; pero si despues de haver disminuido, y acercadose á la mutacion del signo, buelven despues á aumentar, en cuyo caso el numero mas pequeño, ó que mas se aurca á cero sirve para

indicar, qual es el numero, q.e substituido se acerca mas al verdadero valor de una raiz; despues haciendo la incognita igual à dicho numero mas d, substituyendo, y buscando el valor de d. se conseguirà el dela incognita con la exactitud, que se nesesite.

Sea la equacion $x^3 - 2x^2 - 20x + 53 = 0$

Supuestos		Resultas.
1	$1 - 2 - 20 + 53$	$= 32$
2	$8 - 8 - 40 + 53$	$= 13$
3	$27 - 18 - 60 + 53$	$= 02$
4	$64 - 32 - 80 + 53$	$= 05$
5	$125 - 50 - 100 + 53$	$= 28.$

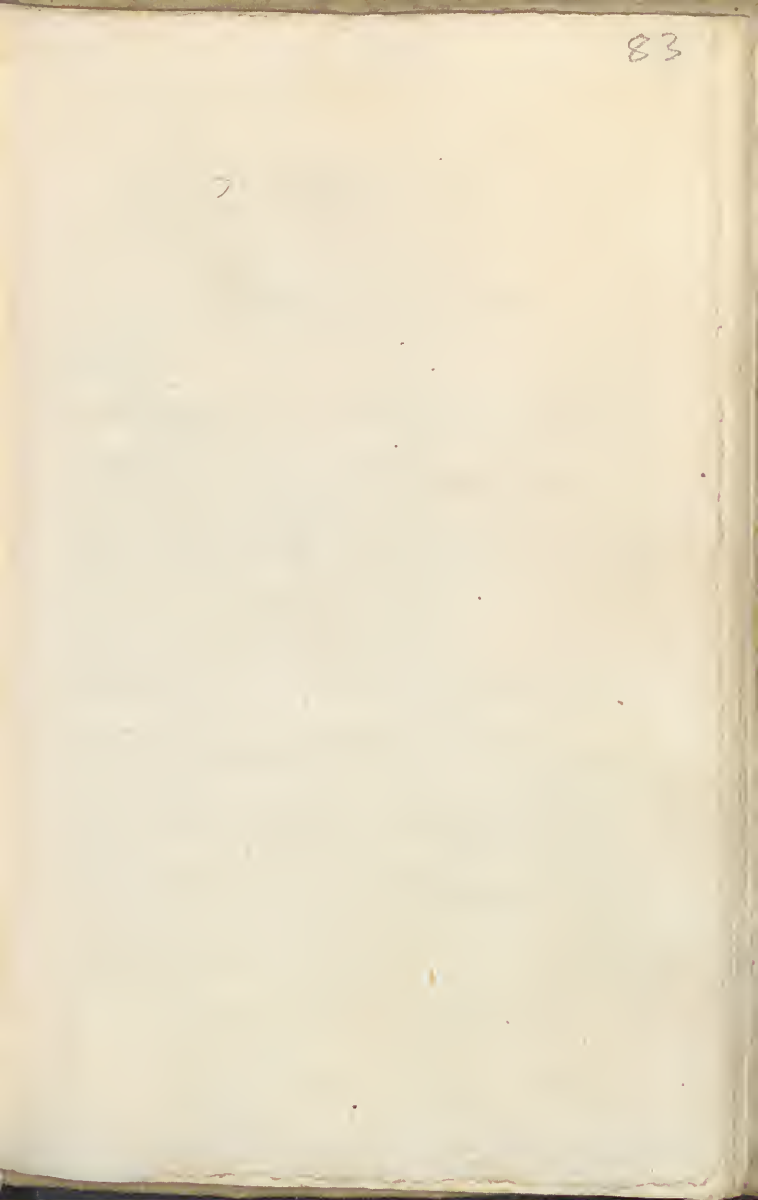
Como en la equacion propuesta que se ha supuesto, por x los

numeros 1; 2; 3; 4; 5 y han dado los resultados 32; 13; 2; 5; 28; el resultado mas proximo á cero es 2 su supuesto es 3, luego $x = 3 + d$; substituyase por x este valor como queda dicho, y se hallará otro valor mas aproximado.

El quadrado de un polinomio es = á la suma de ~~todos~~ los quadrados de todos los terminos + el duplo de cada termino por cada uno de los que le siguen.

El cubo de un polinomio es = á la suma de los cubos de todos los terminos + el triplo del quadrado de cada termino

multiplicado por cada uno de
los demas: + 6 veces cada uno
de los ternarios que se pue-
dan formar con dichos
terminos. = [illegible] do ternario


83

Libro V del Euclides.

Definiciones.

1.ª Parte es una cantidad menor respecto de otra mayor, quando la menor mide ala mayor igual numero de veces: como 2 es parte de 4 por medirle justamente dos veces: de 6 por medirle 3: de 8. 4. &c.ª y asi otro qualquier numero; como 3 respecto de 9, 5 de 20 &c.ª

2.ª Multiplice es una canti-
dad mayor respecto de otra
menor, quando la mayor con-
tiene á la menor igual nu-
mero de veces.

3.ª Razon es la havitud rela-
cion, respecto comparacion, o
cotejo, que se hace de una can-
tidad á otra de la misma es-
pecie.

4.ª Proporcion es la semejanza
o igualdad de dos razones; esto
es: la comparacion de una ra-
zon, á otra igual á ella.

5.ª Solar aquellas cosas, que
son de una misma especie,

pueden tener razon entre
si, porque no siendo las can-
tidades univocas, ò equibo-
cas no se pueden comparar.
6.ª Si de 4 cantidades se to-
maren equimultiplices de
primera, y tercera, y otros
de segunda, y quarta, suce-
diere que siendo el multi-
plice de la primera mayor
que el de la segunda, el de la
tercera es precisamente
mayor que el de la quarta,
si igual, igual, y si menor,
menor. En este caso ten-
dra el primer termino

al segundo igual razon, que el 3.º al quarto. Y si quatro cantidades tubieren la primera ala 2.ª igual razon, que la tercera ala quarta, y si tomaren equimultiplices dela primera, y tercera, y otros dela 2.ª y quarta, se arguira, que si el multiplice dela 1.ª es mayor que el dela Segunda, el dela tercera es precisamente mayor, que el dela quarta, si igual, igual, y si menor, menor.

7.ª Los terminos deque se compone la proporcion, se llaman proporcionales.

8.ª Si de quatro quantidades se tomaren equimultiplices de la primera, y tercera, y otros de la segunda y quarta, y sucediere, que siendo el multiplice de la primera mayor q.e el de la segunda, el de la 3.ª no fuere precisamente mayor que el de la quarta; y tambien siendo el multiplice de la primera igual al de la segunda, el de la tercera fuere precisamente menor, que el de la quarta; tendrá la primera magnitud de la segunda mayor

razon, que la tercera àla 8
quanta. Y si quatro cantida-
des tubieren la primera
àla Segunda mayor razon,
que la tercera à la quanta,
y se tomaren equimultipli-
ces de primera, y tercera,
y otros de Segunda y quanta,
se arguira, que si el mul-
tiplice dela primera es ma-
yor, que el dela Segunda, el
dela tercera no es precisa-
mente mayor que el dela
quanta, y si el multiplice
dela primera es igual al

dela 2.ª, el de la tercera
es precisamente menor q.
el de la quarta.

9.ª La proporcion no puede
constar menos que de tres
terminos.

10. Si algunas cantidades
fueren continuas proporcio-
nales tendrá la primera
ala tercera razon duplica-
da dela que hay de prime-
ra à segunda, ó de segunda
a tercera, y el primer ter-
mino al quarto razon tri-
plicada de la que hay de

primera à Segunda, ò la
Segunda à tercera, ò la
tercera à quarta &c.ª
41. Terminos Omologos, omoge-
neos, ò semejantes en la propor-
cion, se entiende quando se com-
paran los antecedentes con los
antecedentes, y los consecuentes
con los consecuentes, siendo di-
chos terminos especificos.
42 Comparar alternando es
cuando se comparan los ante-
cedentes entre si y lo mismo
con los consecuentes. Como
si se compara directamente
24 : 6 :: 8 : 2 alternativamen-
te seran 24 : 8 :: 6 : 2.

13. Comparar inbirtiendo es quando se compara cada consecuente à su antecedente, como si son proporcionales directamente 24:6 :: 8:2 inbirtiendo seran 2:8 :: 6:24, o 6:24::2:8

14. Comparar componiendo es quando se compara la suma del antecedente y consecuente à su consecuente.

15. Dividir, o comparar dividiendo es quando se compara la diferencia del antecedente y consecuente con el consecuente, y esta es la division directa; como si

son proporciones directamente, 24 : 6 :: 8 : 2 seran por division 18 : 6 :: 6 : 2.

16. Comparar combirtiendo es, ~~comp~~ quando se compara el antecedente, y consequente: ^ ala diferencia q.^e hay entre el antecedente como si son proporcionales directamente 8 : 2 :: 12 : 3 convirtiendo seran proporcionales 8 : 6 :: 12 : 9.

17. Comparar por igualdad ordenada es, quando haviendo en una, y otra parte tu la proporcion mas de dos terminos, pero tantos en una como en otra parte se compararé el primero

al segundo delas prime-
ras, como el primero al
segundo delas segundas,
y el segundo al tercero de
las primeras, como el se-
gundo al tercero delas
segundas, y continuando assi
la comparacion, hasta com-
parar el penultimo al
ultimo delas primeras
como el penultimo al
ultimo delas segundas.

18. Comparar por igualdad
desordenada es, quando
aviendo en vna, y otra par-
te dela proporcion mas

de dos terminos, se compa-
rare el primero al segun-
do delas primeras, como el
penultimo al ultimo delas
segundas, y el segundo al
tercero delas primeras
como el antepenultimo al
penultimo delas segundas,
y asi se continuarà la com-
paracion, hasta comparar
el penultimo al ultimo de
las primeras, como el
primero al segundo delas
segundas.

19 Razones iguales, o semejan-
-tes son àquellas, cuyos

denominadores son iguales:
como las Razones de 100: 50
de 12 à 6 de 8: 4 que en
todas el denominador es 2

20 Razones desiguales, ò des-
semejantes son las que
tienen desiguales denomi-
nadores: como las Razones
de 4: 1 de 12: 4 de 8: 6 &c.^a
cuyos denominadores 4 de
la primera, 3 dela Segun-
da, $1\frac{1}{3}$ dela tercera son
desiguales; y aquella es
mayor, que tiene mayor
denominador.

21 Razon compuesta es

taque se compone de dife-
rentes razones, iguales o des-
iguales entre si.

22 Una razon compuesta se
dice ser duplicada de otra,
quando su denominador
es quadrado del denomina-
dor de aquella de quien es
duplicada: Como la razon
de 48:12 cuyo denominador
es 4 se dira ser duplicada
de qualquiera de las razones
de 12:6 ó 4:2 cuio deno-
minador es 2. de quien
es quadrado el denomina-
dor 4 de la razon compuesta

de 48 : 12.

23. Una Razon se dixa Ser Subduplicada quando su denominador es la Raiz quadrada de aquella de quien es Subduplicada, como la Razon de 12 : 6, ò 4 : 2 se dice ser Subduplicada de la Razon de 48 à 12 por ser el denominador de las Razones de 12 : 6 ò 4 : 2, el 2 Raiz quadrada del denominador 4 de 48 : 12.

Postulados.

1.º Pidese, que se pueda tomar un multiplice de una cantidad, igualmente de otro, de otra dada.

2.º Pidese, que se pueda tomar una cantidad que tenga á otra una razon dada.

Proposiciones.

1.a Theorema.

Si algunas cantidades fue-
ren equimultiplices de
otras tantas, como una
lo fuere de una, assi todas
juntas lo seran de todas
juntas.

2.a Theorema.

Si la primera magnitud
fuere igualmente multi-
plice de la segunda, como
la tercera de la quarta
y la quinta fuere igualm.te

multiplice dela Segunda, como la Sexta dela quarta; Sera la compuesta de primera, y quinta igualmente multiplice dela Segunda, como la compuesta dela tercera, y sexta dela quarta.

3.ª Theorema

Si la primera magnitud fuere igualmente multiplice dela Segunda, como la tercera dela quarta, y la quinta fuere igual-

mente multiplice dela 94
primera, como la sexta
dela tercera, sera la
quinta igualmente mul-
tiplice dela segunda,
como la sexta de la
quarta.

4.ª Teorema.

Si quatro quantidades son
proporcionales, y se toman
equimultiplices de primera,
y tercera, y otros de 2.ª
y 4.ª estos segun qualqui-
era multiplicacion son
proporcionales.

5.ª Theorema.

Si el todo es igualmente multiplice del todo, como lo quitado delo quitado, el residuo será igualmente multiplice del residuo, como el todo lo es del todo, ò lo quitado delo quitado.

6.ª Theorema.

Si dos cantidades fueren equimultiplices delotras dos, y delas primeras se quitaren algunas partes equimultiplices delas segundas, los residuos delas

primeras seran equimultiplices de las segundas, o iguales à ellas.

7.ª Theorema.

Magnitudes iguales à otra tercera, tienen una misma razon; y una magnitud à dos iguales la misma razon tiene à una que à otra.

8.ª Theorema.

De dos quantidades desiguales, la mayor à otra tercera, tiene mayor razon, que la menor; y

vna magnitud à dos desigua-
les à la menor tiene ma-
yor razon, que àla mayor.

9.ª Theorema

Las magnitudes, que à
otra tercera tienen vna
misma razon, son iguales;
y si vna magnitud à otras
dos tiene vna misma
razon, estas tambien son
iguales.

~~10 Theorema.~~

~~Las magnitudes, que àotra
tercera~~

10 Theorema.

De dos Cantidades desigua-
les, laque a otra tercera
tubiere mayor Razon, es
mayor; y una magni[illegible]
ados desiguales ala que
tiene mayor Razon es
mayor que la otra.

11 Theorema.

Las Razones iguales, ó
Semejantes á otra terce-
ra, Son iguales, ó Seme-
jantes entre si.

12 Theorema.

Si algunas magnitudes son proporciones, como un antecedente àsu consecuen-te, asi la suma de todos los antecedentes àla suma de todos los consecuentes.

13 Theorema

Si la primera magni-tud àla segunda es como la tercera àla quarta, y la tercera à la quarta tie-ne mayor razon que la quinta àla sexta; la 1.a àla segunda tiene mayor

razon, que la quinta
àla sexta.

§ 4 Teorema.

Si quatro magnitudes
son proporcionales, si la
primera es mayor que
la tercera, la segunda es
mayor que la quarta, si
igual, igual, y si menor me-
nor.

§ 5 Teorema

Las partes y sus equi-
multiplices tienen una
misma razon.

16 Theorema

Si quatro ~~cantidades~~ magnitudes son proporcionales directamente alternando tambien lo seran.

17 Theorema.

Si algunas magnitudes compuestas son proporcionales dividiendo tambien lo son.

18 Theorema.

Si algunas magnitudes divididas son proporcionales, componiendo tambien lo seran.

13 Theorema

Si el todo al todo, es como lo quitado alo quitado, el residuo al residuo es como el todo al todo, o lo quitado alo quitado.

14 Theorema

Si tres magnitudes de una parte, y otras tantas de otra, estan en razon ordenada, si la primera de las primeras es mayor que la ultima de las segundas, tambien la primera es mayor q. la ultima, si igual igual ~~y si mayor mayor~~. si menor menor.

21 Theorema.

Si tres magnitudes deuna parte, y otras tantas de otra estan en razon desordenada si la primera delas primeras es mayor que la ultima delas primeras, la primera delas segundas es mayor que la ultima delas mismas, si igual igual, y si menor, menor.

22 Theorema.

Si algunas magnitudes deuna parte, y otras tantas deotra estan en razon ordenada, son proporcionales

por igualdad de Razon la primera ala ultima de las primeras, como la primera ala ultima delas segundas.

23 Theorema.

Si algunas magnitudes de vna parte, y otras tantas deotra estan en Razon desordenada, son proporcionales por igualdad de Razon la primera àla ultima delas primeras, como la primera àla ultima de las segundas.

24 Theorema

Si la primera magnitud à la segunda es como la tercera, àla quarta, y la quinta a la Segunda es como la Sexta àla quarta; la compuesta dela primera y quinta, à la segunda es como la compuesta de tercera y sexta àla quarta.

25 Theorema.

Si quatro magnitudes son proporcionales, la maxima con la minima son mayores que las otras dos.

26 Theorema.

Si la primera magnitud à la segunda tiene mayor razon, que la tercera ala quarta, imbirtiendo la quarta à la tercera tiene mayor razon que la segunda àla primera.

27 teorema.

Si la primera magnitud à la segunda tiene mayor razon, que la tercera àla quarta; alternando la primera ala Tercera, tiene mayor razon que la segunda àla quarta.

28 Theorema.

Si la primera magnitud à la segunda tiene mayor razon que la tercera àla quarta, componiendo la compuesta de primera y segunda à la segunda tiene mayor razon que la compuesta de tercera y quarta àla quarta.

29 Theorema.

Si la compuesta de primera, y segunda àla segunda tiene mayor razon, que la compuesta de tercera y quarta àla quarta, dividiendo la

primera àla segunda tiene mayor razon que la tercera àla quarta.

30 Theorema.

Si la compuesta de prim.ª y segunda àla segunda tiene mayor razon, que la Compuesta de tercera y quarta àla quarta, combirtiendo la compuesta de prim.ª y seg.da àla prim.ª tiene menor razon q.e la compuesta de tercera y quarta àla quarta.

31 Theorema.

Si tres magnitudes de vna

parte, y otras tantas de otra estan en mayor razon orde-nada tendra por igualdad de razon la primera à la terce-ra de las primeras mayor razon q la prim.a à la terce-ra de las segundas.

32. Theorema.

Si tres magnitudes de vna par-te y otras tantas de otra estan en mayor razon desordena-da tendra la primera à la tercera de las primeras ma-yor razon que la prime-ra à la tercera de las segundas.

33. Theorema.

Si el todo al todo tiene mayor razon que lo quitado à lo quitado, el residuo al residuo, tiene mayor que el todo al todo, ò lo quitado à lo quitado.

34 Theorema.

Si algunas magnitudes de una parte y otras tantas de otra, estan en mayor razon ordenada, tendra por igualdad de razon la primera de las segundas mayor razon que todas las prime-

rars

menos la primera, à todas las Segundas menos la primera; y todas las primeras à todas las Segundas mayor razon que todas las primeras menos la primera à todas las Segundas menos la primera. Y todas las primeras à todas las Segundas mayor razon que la ultima delas primeras àla ultima delas Segundas.

35 Theorema.

Las razones duplicadas de razones iguales, son iguales.

